Différentes notions de moyenne

Exercice 1. Un cycliste roule dix minutes à 5m/s, puis dix autres minutes à 4m/s. Quelle est sa vitesse moyenne, autrement dit quelle est la vitesse v qui permet de parcourir la même distance en autant de temps ?

Exercice 2. Une ville voit sa population augmenter de 40% en un siècle, puis encore augmenter de 60% le siècle suivant. Quel est le pourcentage moyen d'augmentation ?

Exercice 3. On applique un certain courant d'intensité I_1 au bornes d'une résistance R pendant une minute, puis un courant d'intensité I_2 pendant une autre minute. Pendant ce temps-là, la résistance chauffe plus ou moins, en fonction de l'intensité (d'après le cours de physique, la puissance dégagée par la résistance est $P = RI^2$, donc l'énergie dissipée pendant un temps t est $Pt = tRI^2$).

Quelle est « l'intensité moyenne » I qui, appliquée aux bornées de la résistance pendant deux minutes, aurait produit un dégagement d'énergie identique ?

Exercice 4. Un cycliste met 15 minutes à se rendre à un point et à en revenir. Sa vitesse est de 5m/s à l'aller et de 4m/s au retour. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Définition 0.1. Soient x et y des réels.

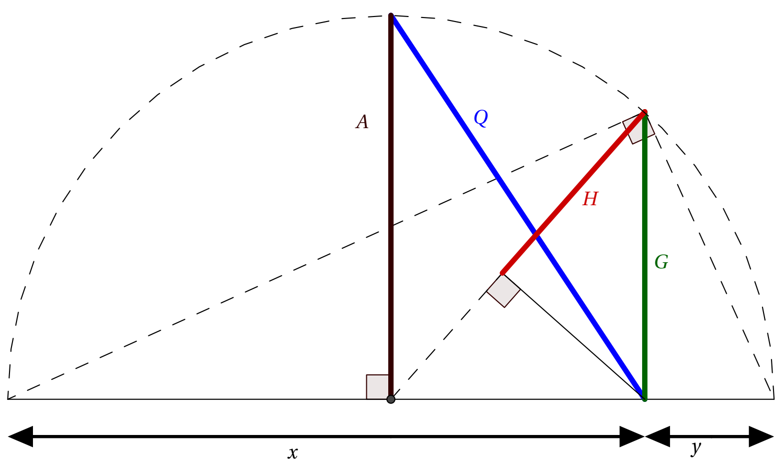
1. Leur *moyenne quadratique* est $Q = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$.
2. Leur *moyenne arithmétique* est $A = \dfrac{x + y}{2}$.
3. S'ils sont positifs, leur *moyenne géométrique* est $G = \sqrt{xy}$.
4. S'ils sont strictement positifs, leur *moyenne harmonique* est $H = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

Théorème 0.2. Soient x et y des nombres strictement positifs, et soient Q, A, G et H leurs différentes moyennes. Alors on a les inégalités :

$$Q \geq A \geq G \geq H,$$

avec égalité si et seulement si $x = y$.

Démonstration. Tout est dans le dessin suivant :



$\square$

On peut définir des moyennes quadratiques, arithmétiques, géométriques et harmoniques de plus de deux nombres. Par exemple, pour trois nombres, les moyennes sont :

$$Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},\ A = \frac{x+y+z}{3},\ G = \sqrt[3]{xyz},\ \text{et } H = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

On a les mêmes inégalités entre moyennes : $Q \geq A \geq G \geq H$, avec égalité ssi $x = y = z$. (Ce n'est pas immédiat à montrer. Pour $A \geq G$, appelée inégalité arithmético-géométrique, voir la preuve par « récurrence de Cauchy » dans la feuille précédente.)

⋆ ⋆ ⋆ Les exercices qui suivent utilisent l'inégalité arithmético-géométrique. ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5. [Maximisation d'aire] Soit p un nombre réel positif. Déterminer le ou les rectangles de périmètre égal à p dont l'aire est maximale.

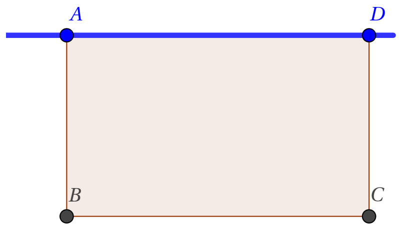
Exercice 6. On considère deux réels positifs dont le produit vaut 100. Leur somme a-t-elle une valeur minimale ou maximale et si oui la(les)quelle(s) et dans quel(s) cas ?

Exercice 7. [Problème de Didon rectangulaire]

Soit Δ une droite du plan et L une longueur fixée. Parmi tous les rectangles $ABCD$ tels que A et D appartiennent à la droite Δ et tels que

$$AB + BC + CD = L,$$

lesquels sont d'aire maximale ? [1]



Exercice 8. [Maximisation de volume] Soit A un nombre réel positif. Déterminer le ou les parallélépipèdes $\mathscr{P}$ dont l'aire (c'est-à-dire la somme des aires des six faces) est égale à A et dont le volume est maximal.

Exercice 9. Soit $n > 0$ un entier. On considère n réels positifs dont le produit vaut 1. Leur somme a-t-elle une valeur minimale et si oui laquelle et dans quel(s) cas ?

Exercice 10. Un magasin vend du café par lots de trois boîtes. Le premier type de lot est composé de trois boîtes cubiques de côté a, b et c respectivement. Le second lot est composé de trois boîtes identiques en forme de parallélépipède de dimensions $a \times b \times c$. Quel lot est-il préférable d'acheter ?

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$, a_1, ... a_n des réels strictement positifs et b_1, ... b_n les mêmes n réels mais numérotés dans un ordre différent. Montrer que

$$\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Exercice 12. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $(1+a^2)(1+b^2) \geq 4ab$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels positifs tels que $a + b = 8$. Déterminer la valeur minimale de la quantité $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ et préciser pour quelles valeurs de a et de b elle est atteinte.

Exercice 14. [Inégalité de Cauchy-Schwarz] Soient a, b, c et d quatre réels. Montrer que

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

et préciser le cas d'égalité.

Exercice 15. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2^x + x^2 = 2 - \dfrac{1}{2^x}$.

1. La droite Δ représente le rivage, et le rectangle $ABCD$ la ville de Carthage. Le but est d'avoir la plus grande ville rectangulaire avec une longueur de remparts fixée à l'avance. Le véritable « problème de Didon » n'impose pas à la ville d'être rectangulaire et la solution est différente.