

Club mathématique de Nancy – Teaser

Problème 1. On considère cinq points du plan, ainsi que tous les segments reliant ces points. On colorie chaque segment, en rouge ou en bleu. Existe-il forcément un triangle dont les côtés sont de même couleur ?

Et avec six points ?

Généraliser à n points et k couleurs.

Problème 2. Un aviateur vole pendant 100 kilomètres droit vers le sud, puis 100 km vers l'est, puis 100 km vers le nord, et constate qu'il est revenu exactement à l'endroit d'où il était parti.

1. Quel pouvait être son point de départ ?
2. Trouver une autre solution au problème (en fait, une infinité).
3. Trouver encore d'autres solutions :-)

Problème 3. Étant donné un triangle ABC , construire, en utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, un point K sur $[AB]$ et un point M sur $[BC]$ tel que $AK = KM = MC$.

Problème 4. Mille Shadocks veulent traverser un désert. Il n'y a qu'une oasis, au tout début, et chaque Shaddock peut porter autant d'eau qu'il est nécessaire pour traverser la moitié du désert. Combien de Shadocks peuvent survivre à l'aventure ?

Problème 5. De combien de chiffres est composé le nombre 123^{100} ?

Problème 6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, existe-t-il un triangle équilatéral dont les coordonnées des sommets sont des nombres entiers ?

Problème 7. On place quatre points sur un cercle de rayon 1. Montrer qu'il existe deux points parmi les quatre qui sont à distance $\leq \sqrt{2}$ l'un de l'autre.

Indication pour le problème 1. Pour cinq points, il n'existe pas forcément de triangle d'une seule couleur. Pour six points, oui.

Indication pour le problème 2. La solution la plus facile à trouver est le pôle nord.

Indication pour le problème 3. Utiliser un triangle semblable à ABC .

Indication pour le problème 4. Regarder d'abord ce qu'il se passe avec deux, puis trois, puis quatre Shadocks.

Indication pour le problème 5. Utiliser des logs (en base 10).

Indication pour le problème 6. Utiliser soit une formule pour l'aire d'un triangle, soit les nombres complexes.

Indication pour le problème 7. Partager le cercle en quatre quarts.