
Calculs et Mathématiques

Épreuve du 12 janvier 2015

Documents et calculatrices interdits.

Durée 3h.

Encadrer les résultats. Le soin sera noté. Le sujet comporte deux pages.

Barème approximatif : Ex 1 : 0.5 pt, Ex 2 : 2 pts, Ex 3 : 1 pt, Ex 4 : 1.5 pts, Ex 5 : 1.5 pts, Ex 6 : 1.5 pts, Ex 7 : 4 pts, Ex 8 : 3.5 pts, Ex 9 : 2 pts, Ex 10 : 1 pt, Ex 11 : 1.5 pts.

Exercice 1. (Questions de cours) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{C}$. Que signifie, par définition, l'assertion « z est une racine n -ième de l'unité » ?

Exercice 2. Pour chacune des questions une seule des quatre affirmations A , B , C et D est vraie. Déterminer celle qui est vraie. Aucune justification n'est demandée.

Toute réponse juste est comptée +0.5 point, toute réponse fausse est comptée -0.25 point et une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

1. On a

$$\begin{aligned} A : \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x, & \quad B : \forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x, \\ C : \forall x \in [0, \pi], \cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x, & \quad D : \forall x \in [0, \pi], \operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x. \end{aligned}$$

2. les fractions rationnelles suivantes sont des éléments simples :

$$A : \frac{3x}{2x+1}, \quad B : \frac{3x}{(2x+1)^2}, \quad C : \frac{x}{3x^2-2}, \quad D : \frac{x+1}{x^2-2x+3}.$$

3. Une solution particulière de l'équation différentielle $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = te^{3t}$ est

$$\begin{aligned} A : y(t) = t(t/2 - 1)e^{2t} & \quad B : y(t) = t(t/2 - 1)e^{3t} \\ C : y(t) = (t^2 - t)e^{2t} & \quad D : y(t) = 3e^{3t} \end{aligned}$$

4. La dérivée sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \sqrt{e^{3x}}$ est

$$A : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{e^{3x}}}, \quad B : x \mapsto \frac{3}{2}e^{\frac{3x}{2}}, \quad C : x \mapsto \sqrt{e^{3x}}, \quad D : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}}$$

Exercice 3. Préciser le domaine de définition dans \mathbb{R} de l'équation suivante. On ne demande pas de la résoudre

$$\operatorname{Argch}(3 - \ln(2x^2 - 3)) = 1.$$

Exercice 4. Résoudre sur \mathbb{C} l'équation

$$iz^2 - (2+i)z + (3+3i) = 0.$$

Exercice 5. Résoudre sur \mathbb{C} l'équation

$$z^5 = (z+1)^5.$$

Écrire les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 6. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 2 \\ 3x - y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 2z - 2t = -1 \end{cases}$$

Exercice 7. Déterminer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. \int (x+1) \sin(3x) dx & 4. \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \\ 2. \int (\ln(x))^2 dx & 5. \int \frac{dx}{(x+4)(x+3)} \\ 3. \int \frac{dx}{(x-5)^3} & 6. \int \frac{x+1}{(x-2)^2} dx \end{array}$$

Exercice 8. Déterminer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx, x > 1$. Poser $t = 1/x^2$.
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx, x \in]-1, 1[$. Poser $x = \sin(t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- $\int \frac{dx}{(1+\sin(x))\cos(x)}, x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Poser $t = \sin(x)$.

On prendra soin de factoriser le dénominateur de la fraction rationnelle qui apparaît.

Exercice 9.

1. Déterminer les primitives de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{x}{x^2+x+1}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = e^x.$$

Exercice 11. Déterminer suivant le paramètre $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système (\mathcal{S}_a) suivant :

$$(\mathcal{S}_a) \begin{cases} ax + 2y = 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$