Université de Lorraine
Licence de mathématiques, 2014-2015

Découverte des mathématiques
Examen du 07/11/2014, durée : 2h

Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La première partie comporte trois exercices indépendants les uns des autres ; tous sont à traiter. Dans la seconde partie, trois exercices indépendants sont proposés mais chaque étudiant peut choisir de traiter celui qu'il souhaite. **Le barême est fait de telle sorte qu'un étudiant ayant traité la totalité de la partie I et l'un quelconque des trois exercices proposés en partie II est noté sur 20.**

Documents, calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Partie I.

Exercice 1.

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$. Rappeler la définition du coefficient binômial $\binom{n}{k}$ et montrer que
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
3. Soit $n \geq 1$. Déduire des questions précédentes le calcul de la somme suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Exercice 2.

1. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la somme
$$S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k.$$
Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$S_0(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) En déduire pour $n \geq 3$ le calcul de la somme suivante :

$$S_1(n) = \sum_{k=5}^{n+2} (2k+5).$$

2. Pour n entier naturel positif, on pose

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k.$$

(a) Calculer $S_2(1)$, $S_2(2)$ et $S_2(3)$.

(b) Déterminer la valeur de $S_2(n)$ en fonction de la parité de n et démontrer votre résultat.

Exercice 3. Montrer par récurrence que $4^n \geq n^3 + n + 2$ pour tout $n \geq 1$.

Partie II.

Dans cette partie, **seul un exercice** *est à traiter. Vous pouvez donc traiter* **au choix** *l'exercice A, l'exercice B ou l'exercice C. Il est fortement conseillé de ne pas "picorer" dans les trois exercices. La notation récompensera les étudiants qui auront traité sérieusement l'un des exercices.*

Exercice A.
Soit $n \geq 1$ un entier. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soient v_n le nombre de parties de E ayant un nombre pair d'éléments et u_n le nombre de parties de E ayant un nombre impair d'éléments. (On rappelle que l'ensemble vide a un nombre pair déléments). Le but de cet exercice et de montrer que $u_n = v_n$ et de calculer u_n.

Suivre les indications :

1. (a) Pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, faire une liste des parties ayant un nombre pair, resp. impair d'éléments, et vérifier de façon directe que $u_n = v_n$.

   (b) Donner un argument simple pour prouver que $u_n = v_n$ dans le cas où n est impair.

2. Dans le cas général, combien y a-t-il de parties dans E ayant k éléments ? En déduire une expression de u_n, resp. de v_n, sous forme d'une somme.

3. Montrer que $u_n = v_n$ en utilisant un cas particulier de la formule du binôme de Newton.

4. Combien de parties y a-t-il dans E ? (Justifier la réponse.) En déduire la valeur de u_n et de v_n.

Exercice B.
Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit E un ensemble et soient A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que
$$\{A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C\} \Leftrightarrow \{B = C\}\,.$$
2. On rappelle que pour $p \in \mathbb{Z}$, $p\mathbb{Z} = \{p \times n /\, n \in \mathbb{Z}\}$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrez que
$$\{a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}\} \;\Leftrightarrow\; \{b \text{ divise } a\}.$$
3. Soit la suite définie par récurrence par
$$\begin{cases} u_0 = 0\,, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
Montrez que $u_n = 2^n - (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice C.
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application.
   (a) Rappeler la définition d'une application injective. Montrer que
   $$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \circ f \text{ injective.}$$
   (b) Rappeler la définition d'une application surjective. Montrer que
   $$f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \circ f \text{ surjective.}$$
2. On va montrer dans cette question qu'un entier N est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.
   (a) Soit $k \geq 1$ un entier naturel. En écrivant $10 = 11 - 1$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, montrer qu'il existe un entier naturel q_k tel que $10^k = (-1)^k + 11q_k$.
   (b) Soit $N \geq 1$ un entier naturel dont l'écriture en base 10 est la suivante :
   $$N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$$

avec pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $0 \leq a_k \leq 9$ (les a_k sont les chiffres du nombres N).
Montrer qu'il existe un entier Q tel que $N = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k + 11Q$.
En déduire que N est divisible par 11 si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ est divisible par 11.

(c) Les nombres 385608368 et 459684203 sont-ils divisibles par 11 ?