Université de Lorraine
Licence de mathématiques, 2014-2015

Découverte des mathématiques
Examen du 15/01/2015, durée : 2h

Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La première partie comporte quatre exercices indépendants les uns des autres ; tous sont à traiter. Dans la seconde partie, trois exercices indépendants sont proposés mais chaque étudiant peut choisir de traiter celui qu'il souhaite. **Le barême est fait de telle sorte qu'un étudiant ayant traité la totalité de la partie I et l'un quelconque des trois exercices proposés en partie II est noté sur 20.** *La notation pénalisera une copie dans laquelle un étudiant aura picoré dans les trois exercices de la partie II sans en traiter un de façon conséquente.*

Documents, calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Partie I.

Exercice 1 :

1. Question de cours : Rappeler la définition d'une relation d'ordre.
   Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$. On dit qu'un ensemble $A \subset E$ admet un plus petit élément si il existe $a \in A$ tel que $a \preceq x$ pour tout $x \in A$.
2. Sur $\mathbb{N}^\star$, on définit la relation binaire $|$ ainsi : pour $n, m \in \mathbb{N}^\star$, $n|m$ si et seulement si n divise m. Montrer que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^\star$.
3. On considère l'ensemble $A := \{2, 3\}$. L'ensemble A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui contient deux éléments. L'ensemble A admet-il un plus petit élément pour la relation $|$? Si oui, quel est-il ?
4. **Question bonus (hors barême).** Même question pour $A = \{4, 6\}$ et $A = \{n! \mid n \geq 2\}$.

Exercice 2

1. Question de cours : Rappeler la définition d'une relation d'équivalence.
2. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par : $A\mathcal{R}B$ si et seulement si il existe une application *bijective* $f : A \to B$, est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
3. On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.
L'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$ est-elle bijective ?
En déduire que l'ensemble des entiers naturels pairs et l'ensemble des entiers naturels sont équivalents au sens de la relation $\mathcal{R}$.
4. Montrer que l'ensemble des entiers naturels pairs et l'ensemble des entiers naturels impairs sont équivalents au sens de la relation $\mathcal{R}$.

Exercice 3 :

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation suivante : pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}'y$ si et seulement si $\sin x = \sin y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0 (notée au choix $\mathcal{R}'(0)$, $[0]$ ou $\overline{0}$) et la classe d'équivalence de $\frac{\pi}{2}$ (notée au choix $\mathcal{R}'(\pi/2)$, $[\pi/2]$ ou $\overline{\pi/2}$).

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.
2. En utilisant le cours, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$ et préciser sa limite.

Partie II.

Exercice A.

Soit M un ensemble et $f : M \to M$ une application. On notera $f^0 := \mathrm{id}_M$, $f^1 := f$, $f^2 := f \circ f$, et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n+1} := f^n \circ f.$$

1. Montrer : si $f^2 = \mathrm{id}_M$, alors f est bijective ; quelle est alors son application réciproque ? Plus généralement, montrer que si $f^n = \mathrm{id}_M$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors f est bijective, et dire quelle est son application réciproque.

2. Soit f et g deux applications de M dans M et telles que $f^2 = \mathrm{id}_M = g^2$. Rappeller la définition de $g \circ f$ et écrire l'application $(g \circ f)^2$, puis montrer que, si $g \circ f = f \circ g$, alors on a aussi $(g \circ f)^2 = \mathrm{id}_M$.
3. Soit maintenant $M = \mathbb{C}$ et
$$f : M \to M,\ f(z) = \overline{z} \quad \text{et} \quad g : M \to M,\ g(z) = \overline{z} + 2i.$$
Montrer que f et g sont bijectives et calculer les applications réciproques.
Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis $(g \circ f)^2, (g \circ f)^3, \ldots$ *(on rappelle qu'il s'agit ici d'itération des composées et non d'une puissance au sens de la multiplication des fonctions).*
Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(g \circ f)^n = \mathrm{id}_M$? (Justifier la réponse.)
4. Soit $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $j(z) = -z$. Calculer son application réciproque.
Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie par $h(z) = iz$. Montrer que $j \circ h = h \circ j$ et que cette application est bijective ; calculer son application réciproque.

Exercice B. Soit E un sensemble. Pour tout sous-ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit la fonction :
$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$ et $\mathbf{1}_E$.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \forall B \in \mathcal{P}(E),\ \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \Leftrightarrow A = B$.
3. Soient $A, B \subset E$. Montrez que
$$A \subset B \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\forall x \in E,\ \mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)\}.$$
4. Soit $f : E \to \{0,1\}$ une fonction. On pose $A := f^{-1}(\{1\})$. Montrez que $f = \mathbf{1}_A$.

Exercice C.

1. Calculer le reste de la division euclidienne de 2015^{2015} par 11. Justifier vos calculs.
2. Étant donné un réel ζ, on note $\mathbb{Q}(\zeta)$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\zeta$ avec a et b rationnels :
$$\mathbb{Q}(\zeta) = \{a + b\zeta \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
   (a) Montrer que si ζ est irrationnel, alors pour $z \in \mathbb{Q}(\zeta)$, les nombres rationnels a, b dans l'écriture $z = a + b\zeta$ sont uniquement déterminés.
   (b) Montrer que $\sqrt{12}$ est un nombre irrationnel. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.
   (c) Montrer qu'il existe une bijection f de $\mathbb{Q}^2$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt{12})$.