Université de Lorraine - Nancy **L1 - algèbre linéaire**

Partiel du 18 mars 2015

Questions de cours.
Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que l'ensemble

$$F + G = \{x + y : x \in F \text{ et } y \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Rappeler la définition du noyau $\ker \varphi$. Puis, montrer que φ est injective si et seulement si $\ker \varphi = \{0\}$.

c) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire bijective. Montrer que la bijection réciproque $\varphi^{-1} : F \to E$ est linéaire.

Exercice 1. Soit

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}.$$

1) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une famille génératrice de E, et montrer que cette famille est une base.

Exercice 2. Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$, $f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1) Soit $u = (x_1, x_2, x_3)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$. Exprimer u en fonction de e_1, e_2, e_3. Calculer $f(u)$.

2) Déterminer le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective?

3) À quelle condition un vecteur $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ appartient-il à l'image de f? L'application f est-elle surjective?

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathbb{K}$ est en particulier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une application linéaire.

1) Fixons $a \notin \ker f$. (Ainsi $f(a)$ est un scalaire non nul.)

   (i) Montrer que $\ker f \cap \mathbb{K}a = \{0\}$.

   (ii) Pour $x \in E$, calculer l'image du vecteur $x - \frac{f(x)}{f(a)}a$ par f.

   (iii) En déduire que $E = \ker f \oplus \mathbb{K}a$.

2) Application: soient f et g deux applications linéaires de E vers $\mathbb{K}$. Montrer l'équivalence:

$$\ker f = \ker g \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ g = \lambda f.$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $\ker(q) \subset \ker(p \circ q)$.

2) En déduire que si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$, alors $\ker(p) = \ker(q)$.

On suppose maintenant que p et q sont deux projecteurs.

3) Montrer que $p - \mathrm{id}_E$ est un projecteur et que $\mathrm{Im}(p - \mathrm{id}_E) = \ker(p)$.

4) Montrer que si $\mathrm{Im}(p - \mathrm{id}_E) \subset \ker(q)$, alors $q \circ p = q$.

5) Déduire que si p et q sont deux projecteurs, alors $\ker(p) = \ker(q)$ si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice 5. On suppose que $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E (i.e., la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre). Les vecteurs

$$u_1 - u_2,\ u_2 - u_3,\ u_3 - u_4, \ldots,\ u_{n-1} - u_n,\ u_n - u_1$$

sont-ils linéairement indépendants?