Université de Lorraine **L1 - algèbre linéaire**

Examen du 26 mai 2015

Documents et calculatrices interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Le barème est marqué à titre indicatif.

Par la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours. [3,5 points]

I. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
I.a) Enoncer le théorème du rang.
I.b) On suppose maintenant que $\dim E = \dim F$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad f \text{ est bijective,} \qquad (2) \quad f \text{ est injective,} \qquad (3) \quad f \text{ est surjective.}$$

II. Montrer le résultat suivant.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, avec une base $\mathcal{B}$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et soit $[f]_{\mathcal{B}}$ sa matrice. On a : f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est inversible. Et dans ce cas $[f^{-1}]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

La démonstration pourra s'appuyer sur le lien existant entre la matrice de $[h \circ g]_{\mathcal{B}}$ et les matrices de $[h]_{\mathcal{B}}$ et $[g]_{\mathcal{B}}$ pour h et g deux endomorphismes de E.

Exercice 1. [5,5 points] Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \left\{ \begin{array}{r} x + y + z - t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

1) Déterminer une base et la dimension de E.

Soit $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u_1 = (1, -2, 1, 1)\,, \quad u_2 = (2, 1, -1, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (0, 5, -3, -1)\,.$$

2) Déterminer une base et la dimension de F.

3) Déterminer un système d'équations de F.

4) Déterminer une base et la dimension de $E \cap F$.

5) Déduire de ce qui précède la dimension de $E + F$.

6) Déterminer une base de $E + F$.

Tourner la page s'il vous plaît

Exercice 2. [4 points]
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer deux nombres réels a, b tels que $A = aP + bQ$.

2) Calculer P^2, Q^2, PQ, QP.

3) Montrer par récurrence que $A^n = a^n P + b^n Q$.

Exercice 3. [3 points] On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_1 - x_4, x_1 + x_4, -x_2 + x_3)\,.$$

On note $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

1) Déterminer A.

2) Calculer A^2.

3) Déduire de 2) que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4) Déduire de ce qui précède que f est un isomorphisme.

5) On note f^{-1} l'isomorphisme inverse de f. Déterminer $f^{-1}((y_1, y_2, y_3, y_4))$ où (y_1, y_2, y_3, y_4) est un élément arbitraire de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. [6,5 points] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ la famille définie par

$$w_1 = v_1 + v_3\,, \qquad w_2 = v_2 - v_3\,, \qquad w_3 = v_1 + v_2 - v_3\,.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.

2) Écrire v_1, v_2 et v_3 en tant que combinations linéaires de (w_1, w_2, w_3).

3) Écrire les coordonnées de $f(w_1)$, $f(w_2)$ et $f(w_3)$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{C}$.

4) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ (au départ et à l'arrivée);

5) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

6) Déterminer P^{-1}

7) Vérifier la matrice de f déterminée dans 4) à l'aide d'une formule du cours.

8) Déterminer le rang de f.