Université de Lorraine **Licence de mathématiques, 2014-2015**

Analyse 1
Examen du 13 mars 2015, durée : 2h

Documents et calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Écrire la définition de "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite".
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un point de I. Donner la définition de f est continue en a.
3. Donner la caractérisation de l'existence de la limite d'une fonction f en un point a à l'aide des suites.
4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 2. Déterminer si les limites suivantes existent en justifiant votre réponse. Si c'est le cas, donner leur valeur :

$$\lim_{n\to+\infty}(4+\cos n)^{1/n};\quad \lim_{n\to+\infty} n^3(\ln n)^2e^{-n};\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln\ln n)^6}{n};$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right);\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3(n+1)^2(n-2)}{n^3 \ldots + 1};\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{\ldots}\right)$$
[illegible]

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'elle existe.
4. Dans le cas $\alpha < 1$, déterminer un rang à partir duquel $|u_n| \leq 1/100$.

Exercice 4. Déterminer si les limites suivantes existent en justifiant votre réponse. Si c'est le cas, donner leur valeur :

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\cos(1/x^2) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\cos(1/x).$$

Exercice 5. Soit a un nombre réel. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x < 0 \\ (x^2 - 3x + 2)E(x) & \text{si } x \quad [0,3[\\ x^2 - ax + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Déterminer le nombre a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Ici $E(x)$ représente la partie entière de x.

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

2. Calculer pour $N \geq 2$ la somme

$$S_N = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

En déduire que la suite $(S_N)_{N\geq 2}$ converge et calculer sa limite.

3. Montrer que la suite $(u_N)_{N\geq 2}$ définie par

$$u_N = \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^{3/2}}$$

converge vers une limite finie l. Que peut-on dire de l ?