Université de Lorraine **Licence de mathématiques 2014-2015**

Analyse 1
Examen du 25 juin 2015, durée : 3h

Documents et calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Exercice 1. Déterminer la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x+x^2}-xe^{-x}\right); \quad \lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}.$$

Exercice 2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 11 de la fonction $f(x)=\frac{x^4}{1-x^2}$. En déduire la valeur de $f^{(10)}(0)$. (On ne cherchera pas à développer les factorielles).

Exercice 3.

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$.
   (a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}$ pour $x>-1$.
   (b) Donner pour tout entier $n\geq 1$ une expression de $f^{(n)}$, la dérivée n-ième de f sur $]-1,+\infty[$.
2. Soit $n\geq 1$ un entier.
   (a) Écrire la formule de Taylor-Lagrange en 0 pour f à l'ordre n.
   (b) En déduire qu'il existe un réel r_n satisfaisant

$$\ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+r_n \quad \text{avec} \quad |r_n|\leq\frac{1}{n+1}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $c_1 < 0 < c_2$ et $f(c_1) = f(c_2) = f(0) + 1$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ un entier naturel fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer la valeur du minimum et le point où il est atteint.
2. (a) Déduire de la question 1 l'inégalité suivante :

   $$(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   (b) Montrer que si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ alors on a

   $$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Exercice 6. Soit α un réel. On considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha \cos(1/x)$.

1. En utilisant des suites, montrer que dans les cas $\alpha < 0$ et $\alpha = 0$, la fonction f_α n'admet pas de limite en 0^+.
2. **Supposons désormais** $\alpha > \mathbf{0}$. Montrer que la fonction f_α peut être prolongée en une fonction $\tilde{f}_\alpha$ continue sur $[0, +\infty[$. Préciser la valeur de $\tilde{f}_\alpha(0)$.
3. Montrer que $\tilde{f}_\alpha$ admet une dérivée à droite en 0 si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Calculer $f'_\alpha(x)$ pour $x > 0$ et montrer que la fonction $\tilde{f}_\alpha$ est continûment dérivable (de classe C^1) sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 2$.