UNIVERSITÉ DE LORRAINE
FACULTÉ DES SCIENCES

SUJET DE PARTIEL

DIPLÔME : LICENCE Semestre 3
Algèbre linéaire 2
Date et horaire: 14 novembre 2014 de 10h00 à 12h00

Durée du sujet : 2 heures
Responsables : J.-F. Grosjean, A. Perego
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice I

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et montrer que f possède exactement 2 valeurs propres que l'on précisera.
2. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de f.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on considère maintenant l'endomorphisme f_a de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer sans calculs que $\det(A_a) = 0$.
5. Calculer le rang de A_a en discutant suivant les valeurs de a. En déduire la dimension du noyau de f_a.
6. On note P_{f_a} le polynôme caractéristique de f_a. Montrer que :
$$P_{f_a}(\lambda) = \lambda^2 \Big(\lambda - 2(1+a) \Big) \Big(\lambda - 2(1-a) \Big)$$
7. Discuter suivant les valeurs de a le nombre de valeurs propres de f_a en précisant à chaque fois le spectre de f_a.
8. Déduire des questions précédentes que pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est diagonalisable.
9. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, diagonaliser f_a.

Exercice II

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice M_a de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que M_a soit diagonalisable (Justifiez votre réponse).

2. Diagonaliser M_a pour les valeurs de a pour lesquelles cela est possible.

Exercice III

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \in \mathbb{C}^\star$. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n$$

2. Soit λ une valeur propre de g et x un vecteur propre de g associé à λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $f^n(x)$ est contenu dans un sous-espace propre de g.

3. En déduire qu'il existe un entier n_λ dépendant de λ tel que $f^{n_\lambda}(x) = 0$.

4. On suppose désormais que g est diagonalisable. Déduire de ce qui précède qu'il existe un entier N tel que $f^N = 0$.

Exercice IV

1. Soient D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $D^k A = 0$ si et seulement si $DA = 0$.

2. En déduire que si M est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M^k A = 0$ si et seulement si $MA = 0$.