UNIVERSITÉ DE LORRAINE
FACULTÉ DES SCIENCES

SUJET DE PARTIEL

DIPLÔME : LICENCE Semestre 3 | Durée du sujet : 3 heures
Algèbre linéaire 2 | Responsables : J.-F. Grosjean, A. Perego
Date et horaire: 14 janvier 2015 de 13h30 à 16h30 | Documents et calculatrices non autorisés

---

Exercice I

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans toute la suite I_4 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. D'autre part E désigne l'espace des matrices colonnes $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique P_A de A vaut : $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3$.

   (Pour le calcul de $P_A(\lambda)$, on pourra commencer par ajouter à la ligne L_1 de $A - \lambda I_4$, $L_3 + 2L_4$ où L_3 et L_4 désignent respectivement la ligne 3 et la ligne 4 de $A - \lambda I_4$).

2. En déduire les valeurs propres de A avec leur multiplicité.

3. Montrer que la dimension du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est 2 et déterminer une base (V_1, V_2) de E_1.

4. En déduire que $\dim(\text{Ker } (A - I_4)^2) = 3$.

5. En déduire le polynôme minimal de A.

6. A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

7. Sans faire de calculs expliquer pourquoi les lignes de $(A - I_4)^2$ sont toutes proportionnelles.

8. Compléter (V_1, V_2) par un vecteur colonne V_3 pour obtenir une base de Ker $(A - I_4)^2$.

9. Déterminer une base (V_4) du sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0.

10. Sans faire de calculs expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ est une base de E.

11. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

12. Trouver les coordonnées de AV_1, AV_2, AV_3 et AV_4 dans la base $\mathcal{B}$ puis écrire la matrice $P^{-1}AP$.

13. Soit (D, N) le couple de la décomposition de Dunford de A. Calculer $P^{-1}DP$ et $P^{-1}NP$.

14. Préciser l'indice de N.

15. Calculer $P^{-1}A^nP$.

16. Calculer $P^{-1}e^AP$.

Exercice II

Soient $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donner les valeurs propres complexes possibles de A.

2. Montrer que si λ est une valeur propre complexe non réelle de A de multiplicité m, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A de même multiplicité m.

3. En déduire le rang de A en fonction de m.

Exercice III

Soient $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A.

1. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

   Soit $\mu_A(X) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ le polynôme minimal de A.

2. Montrer que $a_0 \neq 0$.

3. Trouver un polynôme annulateur de A^{-1} de degré k qui soit unitaire (i.e. dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1).

4. En déduire que $\deg(\mu_{A^{-1}}) \leqslant \deg(\mu_A)$.

5. En déduire l'expression de $\mu_{A^{-1}}$.

Exercice IV

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède r valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ ($r \geqslant 1$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont distinctes).

On se propose de montrer par une méthode différente du cours que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_r}$ de f sont en somme directe.

Soit $F = E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r}$. Le but est donc de montrer que cette somme est directe.

Posons $g = f\,|_F$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$:

$$h_i := \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ k \neq i}} \frac{g - \lambda_k \mathrm{Id}_F}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{g - \lambda_1 \mathrm{Id}_F}{\lambda_i - \lambda_1} \circ \cdots \circ \frac{g - \lambda_{i-1} \mathrm{Id}_F}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \circ \frac{g - \lambda_{i+1} \mathrm{Id}_F}{\lambda_i - \lambda_{i+1}} \circ \cdots \circ \frac{g - \lambda_r \mathrm{Id}_F}{\lambda_i - \lambda_r}$$

1. Montrer que F est stable par g. En déduire que pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, F est stable par h_i.

2. Soit $(i, j) \in \{1, \cdots, r\}^2$. Montrer que pour tout $v \in E_{\lambda_i}$:

$$h_j(v) = \begin{cases} v & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(h_i) = E_{\lambda_i}$.

4. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, r\}^2$, $h_i \circ h_i = h_i$ et $h_i \circ h_j = 0$ dès que $i \neq j$.

5. Montrer que $\mathrm{Id}_F = h_1 + \cdots + h_r$.

6. Déduire de tout ce qui précède en utilisant un résultat du cours que $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.