Analyse 2

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

(1) Dire (avec justification) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) < x^3$ pour tout $x \in [-1,1]$. Alors $\int_{-1}^{1} f(t)dt < 0$.

(b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, continue sauf en un point. Alors f admet une primitive.

(c) Soit (u_n) une suite à termes positifs. Si la suite (nu_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.

(d) Soient (u_n), (v_n) deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

(e) La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

(2) Donner (sans justifier) un exemple d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ non Riemann-intégrable.

Exercice 2.

(1) Calculer :

(a) $I(a) = \displaystyle\int_a^1 \frac{x \log x}{(1+x^2)^2}\, dx$ pour $a > 0$, puis $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} I(a)$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \sqrt{2 + \sin x}\, dx$.

(2) Soit $f : [0.1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\, dt$.

(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

(b) On suppose de plus que $f(1) \neq 0$ et que f est de classe C^1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_n \sim \frac{f(1)}{n}$.

Exercice 3.

(1) Dire si la série de terme général u_n est convergente ou divergente dans les cas suivants :

(a) $u_n = \dfrac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ (pour $n \geq 2$) ;

(b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^a}$ (pour $n \geq 1$), en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

(2) Soient a et b deux nombres réels. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \log n + a\log(n+1) + b\log(n+2)$.

(a) Si $1 + a + b \neq 0$, montrer que la suite (u_n) ne converge pas vers 0. Que dire de la série $\sum u_n$ dans ce cas ?

(b) On suppose maintenant $1 + a + b = 0$. Calculer alors la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} u_n$, et montrer que la série est convergente si et seulement si $b = 1$ et $a = -2$. Quelle est alors sa somme ?

T.S.V.P.

Exercice 4.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ que l'on notera f.

(2) Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur tout intervalle du type $[0, b]$, $b > 0$, et en déduire que la fonction f est continue.

(3) Calculer la dérivée f_n' de f_n et en déduire que $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) - 1 = \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt$.

(4) En déduire que f est dérivable et que $f' = f$. Que vaut $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$?

Exercice 5.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $|f'|$ soit majorée par un réel M sur $]a, b[$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$