**Analyse 2**

*Documents et calculatrices interdits*

**Exercice 1.**

Dire (avec justification) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(1) Si la série $\sum u_n$ converge et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

(2) Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la limite $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors l'intégrale de $f$ entre $-\infty$ et $+\infty$ converge.

(3) Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un espace vectoriel $V$. Alors $N_1 + N_2$ est une norme sur $V$.

(4) Soit $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ une application continue entre deux espaces vectoriels normés. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $V$ alors $f(\mathcal{O})$ est un ouvert de $W$.

(5) Soit $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ une application continue entre deux espaces vectoriels normés. Si $K$ est un compact de $V$ alors $f(K)$ est un compact de $W$.

(6) L'ensemble $\{1 - \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

(7) Si $A$ est un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé, alors $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset A$.

**Exercice 2.**

(1) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = (\cos(\frac{1}{n}))^{n^3}$. Calculer la limite de la suite $(u_n^{1/n})_{n\geq 1}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

(2) Déterminer la nature (absolument convergente, convergente, divergente, grossièrement divergente) de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

**Exercice 3.**

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^\alpha}\,dx$ est convergente. [On pourra d'abord montrer que la fonction $x \mapsto x + \cos x$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$.]

(2) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}}\,dx$.

(3) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ converge et calculer sa valeur.

**Exercice 4.**

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Si $P$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $\deg P$ son degré.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $A_{0,\alpha}(X) = 1$ et $A_{n,\alpha}(X) = X^n - \alpha$ pour tout $n \geq 1$.

(1) On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} \lambda_{n,\alpha}(P)\, A_{n,\alpha}$, où les $\lambda_{n,\alpha}(P)$ sont des réels.

**T.S.V.P.**

(2) Montrer que l'application $N_\alpha : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N_\alpha(P) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{|\lambda_{n,\alpha}(P)|}{2^n}$ est une norme.
(3) Montrer que si $\alpha \neq \beta$, les normes $N_\alpha$ et $N_\beta$ ne sont pas équivalentes. [On pourra montrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$ pour la norme $N_\alpha$.]

**Exercice 5.**
Calculer les limites suivantes :
(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp(x^5+y^5)-1}{(\sin(x^2+y^4))^2}$;
(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
(3) $\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{\sin x}{y} \exp(-\frac{x}{y^2})$. [On pourra montrer dans un premier temps que la fonction $t \mapsto t\exp(-t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.]

**Exercice 6.**
Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 \leq y \leq e^x\}$. Représenter l'ensemble $A$. Cet ensemble est-il ouvert ? fermé ? compact ?
Décrire son intérieur, son adhérence, sa frontière.

**Exercice 7.**
Soit $K$ un sous-ensemble compact d'un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$. Soit $f : K \to K$ une application telle que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$ tels que $x \neq y$.
(1) L'application $f$ est-elle continue ?
(2) Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = x_0$. [On pourra montrer que la fonction $g : K \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x - f(x)\|$ atteint son minimum en un certain $x_0 \in K$, puis vérifier que ce choix de $x_0$ convient.]