Université de Lorraine **Licence de Mathématiques**
Analyse 3 **2013-2014**

Contrôle du 10 Juin, 2014

Sans documents. Durée : 3 heures

1. Soient p et q deux entiers naturels fixés et considérons la fonction H définie par

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p\, y^q}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

   Pour quelles valeurs de $p, q \in \mathbb{N}^*$, la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$?

2. Pour $x > 0$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

   (a) Justifier que la fonction S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
   (c) Etablir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $\sin(\frac{n\pi}{2014})\, z^n$.

4. Déterminer le rayon de convergence et exprimer la somme en termes de fonctions usuelles de la série

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}.$$

5. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f, définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

6. Calculer l'intégrale double

$$\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

   où Ω est le domaine défini par $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 2y\}$.

7. On considère la 1-forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\omega(x,y) = (x^2+y^2-a^2)\, dx - 2ay\, dy$, où $a \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Prouver que la forme différentielle ω n'est pas exacte.
   (b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on définit la 1-forme $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbb{R}^2$ par $\widetilde{\omega}(x,y) = f(x)\omega(x,y)$. Quelle condition doit vérifier f pour que la forme différentielle $\widetilde{\omega}$ soit exacte ? Cette condition est-elle suffisante ? Déterminer une fonction f vérifiant la condition précédente.
   (c) Calculer une primitive de $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (d) Soit C_R le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. Calculer $\int_{C_R} \widetilde{\omega}$.