Université de Lorraine **Licence de Mathématiques**
Analyse 3 **2014-2015**

Partiel du 30 Mars 2015

Sans documents. Durée : 2 heures

1. On considère la fonction H définie par

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2-xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

   (a) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

2. Soient u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & < u(x), x > . \end{array}$$

   (a) Justifier la différentiabilité de l'application H et calculer sa différentielle.

   (b) Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$? Si oui, déterminer sa différentielle seconde.

3. Question de cours : Rappeler l'énoncé du théorème des fonctions implicites. Soit H l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x^2 - 2y - e^{z-1}, xy - z + 1). \end{array}$$

   Montrer qu'au voisinage du point $(1,0,1)) \in \mathbb{R}^3$ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à H pour définir explicitement une application f de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle ouvert I contenant 1 à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, avec pour tout $z \in I$, $H(f(z), z) = 0$. Calculer $Df(1)$.

4. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = n^2 x^n (1-x)$.

   (a) Étudier la convergence simple de la série de terme général u_n sur $[0,1]$.

   (b) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

5. Soit α un nombre réel fixé. Déterminer, selon les valeurs de α, le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \left(\cos(\frac{1}{n}) \right)^{n^\alpha} z^n.$$