Université de Lorraine, L2 maths, UE041 : Géométrie affine et euclidienne

Examen du 27 mai 2015 (9 - 11 h, A11)

Consignes et rappels de notations du cours. *La qualité de la rédaction sera prise en compte : c'est un élément essentiel de l'appréciation. Illustrer vos raisonnements par des figures chaque fois que c'est possible et utile (figures qui peuvent être tracées à main levé, mais doivent être nettes et annotées par des légendes expliquant ce qui est représenté).*

Dans tout ce qui suit, V est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$;
la translation par un vecteur $v \in V$ est notée $\tau_v : V \to V$, $x \mapsto \tau_v(x) = x + v$;
dans un e.v. euclidien de dimension 2, la rotation de centre a et d'angle ϕ est notée $R_{a,\phi}$.

Exercice 1. Similitudes, points fixes.

(1) (Question de cours.) Donner 2 caractérisations équivalentes de *similitudes affines*, et préciser l'écriture matricielle d'une similitude, par rapport à un repère affine orthonormé.

(2) Soit $f(x) = \alpha(x) + b$ une application affine, avec α linéaire, telle que 1 n'est pas une valeur propre de α. Montrer que f admet un unique point fixe.

(3) Soit f une similitude affine qui n'est pas une isométrie. Montrer que f admet un unique point fixe. (Indication : utiliser les points (1) et (2).)

(4) Soit $\dim V = 2$.
– Donner un exemple d'une similitude de V qui n'est ni une isométrie, ni une homothétie.
– Donner un exemple d'une isométrie indirecte de V qui n'a aucun point fixe.
(Justifier les réponses.)

(5) Soit $\dim V = 2$, $v \in V$, $a \in V$, $\phi \in]0, 2\pi[$. Montrer que $f := \tau_v \circ R_{a,\phi}$ admet un unique point fixe, et que f est encore une rotation. Donner une construction géométrique de son centre w (illustrer par une figure. Indication : dessiner le carré basé sur le segment $[a, a + v]$ et placer l'angle ϕ en a tel que l'un des cotés de ce carré soit sa bissectrice, puis construire un parallélogramme dont les sommets sont $a, a + v, w$ et un autre point.) Puis même question pour $g := R_{a,\phi} \circ \tau_v$.

(6) Avec les notations précédentes, caractériser la nature géométrique des applications $\tau_v \circ R_{a,\phi} \circ \tau_{-v}$ et $R_{a,\phi} \circ \tau_v \circ R_{a,-\phi}$.

Exercice 2. Isométries, symétries axiales.

(1) (Question de cours.) Rappeler la définition de la distance $d(p, E)$ entre un point $p \in V$ et un sous-espace affine E dans un espace euclidien V, et citer le résultat du cours expliquant que cette distance est atteinte par un point de E.

(2) Dans la situation du point (1), soit $h : V \to V$ une isométrie telle que $h(p) = p$ et que E est stable par h. Montrer que h fixe au moins un point de E. (Indication : utiliser (1) ; faire une figure.)

(3) Dans la suite de l'exercice, soit $\dim V = 2$, soit D une droite affine de V et $a, b, c \in D$ des points deux à deux distincts, et soit $p \in V$ un point qui n'est pas sur D. Montrer qu'il existe deux applications affines $f, g : V \to V$, uniquement déterminées par les conditions :

$$f(a) = b,\ f(b) = a,\ f(p) = p, \quad g(b) = c,\ g(c) = b,\ g(p) = p.$$

Quelle est la nature géométrique de f et de g ? Justifier la réponse. (Indication : décrire les ensembles de points fixes. Faire une figure.)

(4) Montrer qu'il existe deux produits scalaires sur V, tels que f soit une isométrie par rapport au premier, et g par rapport au second. (Indication : dans les deux cas, il suffit de préciser un repère affine et de définir le produit scalaire en imposant que ce repère soit orthonormé.)

(5) Etudier l'application $h := g \circ f$. Montrer qu'aucun point de D n'est fixé par h, et qu'il n'existe aucun produit scalaire sur V tel que h devienne une isométrie. (Indication : utiliser le point (2).) En déduire qu'il n'existe pas de produit scalaire sur V de sorte que f et g soient tous les deux des isométries par rapport à ce même produit scalaire.

(6) Donner une représentation matricielle de f, g, h et de $f \circ g$, par rapport à un choix fixé de repère affine. (Indication : pour faire un choix judicieux de repère, choisir p comme origine, le premier vector de base parallèle à D, et le deuxième un point de D ; observer qu'alors a, b, c auront même valeur de deuxième coordonnée.) Faire une figure.

(7) Décrire le sous-groupe G engendré par f et g dans $\mathrm{Aff}(V)$: montrer qu'il contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ et une infinité de sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et que tout élément de G peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $f^m h^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \{0, 1\}$.