2e semestre 2014/15

Université de Lorraine, L2 maths, UE041 : Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel du 10 avril 2015 (8 - 10 h, A16)

Consignes et rappels de notations du cours. *Il est conseillé de travailler les exercices dans l'ordre donné. Illustrer vos raisonnements par des figures chaque fois que c'est possible et utile (figures qui peuvent être tracées à main levé, mais doivent être nettes et annotées par des légendes expliquant ce qui est représenté).*

Dans tout ce qui suit, V est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$;
la translation par un vecteur $v \in V$ est notée $\tau_v : V \to V$, $x \mapsto \tau_v(x) = x + v$;
la translation de b vers a est $T_{a,b} = \tau_{a-b}$;
l'homothétie de centre a et de rapport λ est $\lambda_a : V \to V$, $x \mapsto \lambda_a(x) = (1-\lambda)a + \lambda x$;
la droite affine $D_{a,b}$ par deux points distincts a, b est $D_{a,b} = \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$;
un parallélogramme (a, b, c, d) est la donnée de 4 points tels que $D_{a,b} \parallel D_{c,d}$ et $D_{b,c} \parallel D_{a,d}$.

1. Sous-groupes du groupe affine (Partie algébrique).
(1) Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) := \{A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \in \{\pm 1\}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.
(2) Soit $Z \subset \mathbb{R}^2$ la partie définie par

$$Z := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Représenter graphiquement la partie $Z \subset \mathbb{R}^2$ et montrer qu'elle est stable sous l'action de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, i.e., si $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ et $x \in Z$, alors $Ax \in Z$.
(3) Soit $T_Z := \{\tau_a \mid a \in Z\}$. Montrer que T_Z est un sous-groupe du groupe des translations, et que

$$G := \{f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \mid \exists\, A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}), \exists b \in Z : \forall x \in V : \ f(x) = Ax + b\}$$

est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.
(4) Montrer que les deux matrices suivantes sont dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad U := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et calculer les puissances B^k, $k \in \mathbb{Z}$, décrire le sous-groupe $\langle B \rangle$ engendré par B et l'orbite $\{B^k e_2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ du deuxième vecteur de la base canonique sous l'action de ce groupe ; puis mêmes questions pour U (n'oubliez pas de faire une figure).

2. Réflexions centrales. Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que la composée de deux réflexions centrales par rapport à des points $a, b \in V$ est une translation. Quel est son vecteur de translation ? Montrer que la composée de trois réflexions centrales par rapport à des points $a, b, c \in V$ est une réflexion centrale, et déterminer son centre.

3. Réflexions axiales et leurs composées. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\dim V = 2$.
(1) (a) Soit $\Delta := \{a, b, c\}$ un ensemble de trois points du plan V, deux à deux différents et non alignés. Expliquer pourquoi $(a; b, c)$ est un repère affine de V, et montrer qu'il existe

une unique application affine $f : V \to V$ telle que $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = b$. On notera dans toute la suite $J_a^{bc} : V \to V$ cette application : ainsi, par définition

$$J_a^{bc}(a) = a, \qquad J_a^{bc}(b) = c, \qquad J_a^{bc}(c) = b.$$

(b) Etudier la nature géométrique de J_a^{bc} : quel est son ensemble de points fixes ; montrer que J_a^{bc} est bijective ; quelle est son application réciproque ? Montrer que J_a^{bc} préserve la droite $D = D_{b,c}$, ainsi que toute droite parallèle à D ; quel est l'effet de J_a^{bc} sur une telle droite ?
(c) Donner des formules analytiques pour J_a^{bc} :
- quel est l'effet sur des combinaisons affines de la forme $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3$?
- montrer que J_a^{bc} est linéaire par rapport à l'origine a et donner sa matrice par rapport au repère $(a; b, c)$;
- soit $d \in V$ tel que (a, b, c, d) soit un parallélogramme. Montrer que $(a; b, d)$ est un repère affine et donner la matrice de J_a^{bc} par rapport à ce repère.

(2) Avec les notations précédentes, soit $p \in D = D_{b,c}$ un autre point, différent de b et de c. Etudier l'effet de l'application

$$L := J_a^{bp} \circ J_a^{pc} : V \to V$$

(a) de façon géométrique : montrer que L préserve la droite D ainsi que toute droite parallèle à D, et qu'une de ces droites (laquelle ?) est constituée de points fixes. Quel est l'effet géométrique de L_{bc}^a restreinte à une quelconque de ces droites parallèles ? (Indication : on pourra utiliser l'exercice 2, pour chacune de ces droites.) En déduire que L dépend uniquement de a, b, c, et non du choix de p. On notera dans la suite $L_a^{bc} := J_a^{bp} \circ J_a^{pc}$ cette application.

(b) de façon analytique : soit $p = (1 - \mu)b + \mu c$ et écrire les matrices de J_a^{bp} et de J_a^{pc} par rapport au repère $(a; b, d)$ utilisé dans la partie (1) (c), puis calculer le produit de ces matrices ; trouver la matrice de L et observer que le résultat ne dépend pas de μ.

(3) Questions de cours : donner la définition d'un repère affine orthonormé et celle d'une isométrie ; puis montrer :
(a) on peut définir un produit scalaire sur V tel que J_a^{bc} devienne une isométrie (justifier !) ;
(b) par contre, L_a^{bc} ne peut pas être une isométrie, quel que soit le choix de produit scalaire sur V. (Indication : par l'absurde, si un tel produit scalaire existait, prendre pour p le projeté orthogonal de a sur D et rappeler la propriété métrique caractérisant ce point ; en déduire une contradiction.) En déduire qu'il n'existe pas de produit scalaire sur V tel que J_a^{pb} et J_a^{pc} soient tout les deux des isométries pour ce même produit scalaire.

4. (Exercice facultatif qui peut rapporter des points.) On garde les notations de l'exercice précédent.

(1) Montrer que l'application

$$L_c^{ab} \circ L_b^{cd} : V \to V$$

est une translation. Quel est son vecteur de translation ?

(2) Par rapport au repère $(a; b, d)$, calculer les matrices B, resp. A, des applications

$$L_a^{bc}, \qquad \text{resp.} \qquad L_a^{cd},$$

puis calculer AB et montrer que $(AB)^6 = I$ (matrice unité). Donner une interprétation géométrique de ce résultat.