Intégration et probabilités
Examen final du 16/01/2015 (durée 3h)

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera portée dans la notation à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. On rappelle que la fonction tangente, $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, est une bijection, et qu'on note arctan sa fonction réciproque. On rappelle aussi que la fonction tangente est de classe C^∞ et que pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $(\tan)'(x) = 1 + (\tan x)^2$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(\arctan)'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ est convergente et calculer sa valeur.
3. Montrer que pour tout $a \neq 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de a.

Exercice 2. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable telle que $x \mapsto f(x)/x$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à λ.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^2+y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à λ. Dans la suite, on note
$$\forall y \in \mathbb{R}^* \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+y^2} d\lambda(x) \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$
2. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à λ et que
$$\int_{\mathbb{R}} g(y) d\lambda(y) = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{|x|} d\lambda(x).$$

Exercice 3. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On pose
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2} dx.$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ est une intégrale convergente pour $\alpha > 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale. On pourra commencer par fixer $\alpha_0 > 0$ et travailler sur $]\alpha_0, +\infty[$.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. Soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

   Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+\alpha x^2)(1+x^2)}$.

5. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
6. Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 4. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire. Pour tout $t > 0$, on pose

$$G_X(t) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

1. Donner la définition de l'intégrabilité de X. Si on suppose X intégrable, donner la définition de l'espérance de X.
2. Un exemple. On suppose **seulement dans la question 2 de l'exercice 3** que $\mu > 0$ est un paramètre fixé et que X est de densité f_μ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\mu(x) = \mu \exp(-\mu x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

   (a) Déterminer la fonction G_X puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_X(t)dt.$.

   (b) Montrer que X est intégrable et calculer son espérance.

   (c) Pour quelle valeur de $\alpha > 0$ la variable aléatoire $\exp(\alpha X)$ est-elle intégrable ?

3. Soit $t > 0$ un nombre réel. Que vaut $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq t\}})$?
4. En étudiant l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X(\omega) \geq t\}} dt \, d\mathbb{P}(\omega)$, montrer que X est intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si

$$\int_0^{+\infty} G_X(t)dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

   En déduire dans ce cas une autre expression de $\mathbb{E}(X)$.

5. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire. On dit que Y admet un moment exponentiel d'ordre $\alpha > 0$ si et seulement si $\exp(\alpha X)$ est intégrable.

   (a) On suppose que Y admet un moment exponentiel d'ordre $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t > 0 \quad G_Y(t) \leq C \exp(-\alpha t).$$

   On pourra essayer d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\exp(\alpha Y)$.

   (b) Soit $\alpha > 0$ fixé. On note $X = \exp(\alpha Y)$. Donner l'expression de G_X en fonction de G_Y.

   (c) Montrer que Y admet un moment exponentiel d'ordre α si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_Y(t) \exp(\alpha t) dt$ converge.
   On pourra utiliser la question 4 et faire un changement de variable (en travaillant sur un compact).