Université de Lorraine
Probabilités L3 Maths – Partiel de mars 2015

Exercice.

1. Soit $f : (x, y) \mapsto (x + y, x + 3y)$. Démontrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ qu'on déterminera (on peut continuer l'exercice même sans avoir déterminé Ω). Quel est son inverse ?

2. Soient X, Y 2 v.a. i.i.d. de loi Exp(1). Déterminer la loi jointe du couple $(X + Y, X + 3Y)$.

Exercice.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\frac{1}{2}(\delta_{\sqrt{n}} + \delta_{-\sqrt{n}})$. On note $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n^4]$ en développant l'expression $S_n^4 = (X_1 + \ldots + X_n)^4$. Donner un équivalent du résultat lorsque $n \to \infty$ (on trouve: $\mathbb{E}[S_n^4] \sim_{n\to\infty} \frac{3}{4}n^4$, résultat qu'on peut utiliser directement pour résoudre la question 2.). On rappelle: $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Montrer que $\frac{S_n}{n^{3/2}} \stackrel{p.s}{\to} 0$ quand $n \to \infty$. (On montrera que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[\frac{S_n}{n^{3/2}} > \varepsilon_n] < \infty$ pour une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ appropriée tendant vers 0, et on utilisera Borel-Cantelli.)