Université de Lorraine
Probabilités L3 Maths – Examen mai 2015

Exercice 1

Soient X, Y deux v.a. i.i.d. de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi du couple $(\frac{X}{X+Y}, X+Y)$.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. positives *admettant un moment exponentiel*, i.e. telles qu'il existe $\alpha > 0$ avec $\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}] < \infty$.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{(\log n)^{1+\varepsilon}} = 0$ p.s.
2. Un exemple d'application : montrer qu'une v.a. de loi exponentielle, ou la valeur absolue d'une v.a. gaussienne, admettent un moment exponentiel.

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $x \in [0,1]$. On considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathrm{Ber}(x)$, et on note $M_n := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \in [0,1]$, $n \geq 1$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[f(M_n)] \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$.
2. En utilisant le théorème de transfert, donner une expression explicite de $\mathbb{E}[f(M_n)]$ (on trouve un polynôme en x de degré n, dont les coefficients s'expriment en termes des valeurs de f en les points k/n, $k = 0, \ldots, n$).

(suite au verso)

Problème

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et centrées, i.e. telles que $\mathbb{E}[Y_n] = 0$, $n \geq 1$. On fait l'hypothèse suivante:

$$\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}(Y_n) < \infty. \tag{1}$$

Le but du problème est de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} Y_n$ converge p.s. On se sert pour cela de l'*inégalité de Kolmogorov* (admise) qui dit que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{n\geq 1} |X_1 + \ldots + X_n| > x\right] \leq \frac{\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}(X_n)}{x^2} \tag{2}$$

pour toute suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. réelles indépendantes et centrées telles que $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$.

1. Soit $T_n := Y_1 + \ldots + Y_n$ $(n \geq 1)$. En utilisant l'inégalité de Kolmogorov, montrer que, pour tout $M \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{n\geq 1} |T_{M+n} - T_M| > x\right] \leq \frac{r_M}{x^2}. \tag{3}$$

où l'on a posé: $r_M := \sum_{k>M} \mathrm{Var}(Y_k)$.

2. Soit $V_M := \sup_{k,l>M} |T_k - T_l|$. Montrer que:

$$\mathbb{P}[V_M > \frac{1}{k}] \leq \mathbb{P}\left[\sup_{n\geq 1} |T_{M+n} - T_M| > \frac{1}{2k}\right] \leq 4k^2 r_M \underset{M\to\infty}{\to} 0. \tag{4}$$

Indication: on pourra montrer que $V_M \leq 2\sup_{n\geq 1} |T_{M+n} - T_M|$.

3. Déduire de 2. qu'il existe une sous-suite $(V_{M(k)})_{k\geq 1}$, $M(k) > M(k-1)$, telle que $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[V_{M(k)} > \frac{1}{k}] < \infty$. En déduire que $V_{M(k)} \to 0$ p.s.

4. Montrer que $(V_M)_{M\geq 1}$ est une suite décroissante. Conclure en utilisant 3.