Université de Lorraine
Licence de mathématiques, 2015-2016

Découverte des mathématiques
Examen du 06/11/2014, durée : 2h

Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La première partie comporte trois exercices indépendants les uns des autres ; tous sont à traiter. Dans la seconde partie, trois exercices indépendants sont proposés mais chaque étudiant peut choisir de traiter celui qu'il souhaite. Le barême est fait de telle sorte qu'un étudiant ayant traité la totalité de la partie I et l'un quelconque des trois exercices proposés en partie II est noté sur 20.

Documents, calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Partie I.

Exercice 1.

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. Pour tout entier $m \geq 0$, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}.$$

3. Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Rappeler la définition du coe□cient binômial $\binom{n}{k}$ et montrer que

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

4. En déduire le calcul de la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que 7 divise $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la propriété à démontrer est équivalente à la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 0$, il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n+2} = 7q_n + 2^{n+1}$.
2. Montrer cette dernière propriété par récurrence.

Exercice 3.

1. Montrer par récurrence : $2^n \geq 6n + 6$ pour $n \geq 6$.
2. (a) En utilisant la première question, montrer que

$$(3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1) - (3n^2 + 3n + 1) \leq 2^n \quad \text{pour} \quad n \geq 6.$$

   (b) En utilisant ce résultat, montrer par récurrence que $3n^2 + 3n + 1 \leq 2^n$ pour $n \geq 8$.
3. En utilisant le résultat précédent, montrer par récurrence que $n^3 \leq 2^n$ pour $n \geq 10$.

Partie II.

Dans cette partie, seul un exercice *est à traiter. Vous pouvez donc traiter* au choix *l'exercice A ou l'exercice B ou l'exercice C. Il est fortement conseillé de ne pas "picorer" dans les trois exercices. La notation récompensera les étudiants qui auront traité sérieusement l'un des exercices.*

Exercice A.

1. (Question de cours.) Rappeler la définition d'une relation d'équivalence.
2. (Question de cours.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que par : aRb si $a \equiv b \bmod n$, on définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
3. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que par aVb si $[a \equiv b \bmod n$ et $a \equiv b \bmod m]$, on définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Décrire cette relation dans le cas où $n = 3$ et $m = 8$, puis dans le cas où $n = 4$ et $m = 10$, puis dans le cas général.
4. Montrer : si R et S sont deux relations d'équivalence sur un ensemble M, alors par xUy si $[xRy$ ou $xSy]$, on définit une relation sur M qui vérifie deux des propriétés définissant une relation d'équivalence, mais pas nécessairement la troisième.

Exercice B.
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Pour $A \subset E$ et $C \subset F$, définir $f(A)$ l'image directe de A et $f^{-1}(C)$ l'image réciproque de C.
2. Soient $C, D \subset F$. En procédant par double inclusion, montrer que
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$
3. Soient $A, B \subset E$. Montrer que
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
Donner un exemple pour lequel l'inclusion est stricte.
4. (a) Donner la définition de $f : E \to F$ est injective.
   (b) Soient $A, B \subset E$. On suppose que f est injective. Montrer que
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice C. Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que si p est un nombre premier qui divise $a+b$ et ab alors p divise a et b. En déduire par l'absurde que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.
2. (a) Pour un entier naturel m, déterminer le reste de la division euclidienne de m^2 par 4 en fonction de la parité de m.
   (b) Soit n un entier naturel qui est la somme de deux carrés de nombres entiers $n = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$. En raisonnant sur la parité de a et b, montrer que le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais 3.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que 24 divise toujours le produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$.
Indication : On pourra au choix utiliser les coefficients binomiaux ou examiner les restes des divisions euclidiennes des facteurs du produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ par 4 et par 3.