Université de Lorraine
Licence de mathématiques, 2015-2016

Découverte des mathématiques
Examen du 13/01/2016, durée : 2h

Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La première partie comporte trois exercices indépendants les uns des autres ; tous sont à traiter. Dans la seconde partie, deux exercices indépendants sont proposés mais chaque étudiant peut choisir de traiter celui qu'il souhaite. **Le barème est fait de telle sorte qu'un étudiant ayant traité la totalité de la partie I et l'un quelconque des deux exercices proposés en partie II est noté sur 20.**

Documents, calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Partie I.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g_n(x) = x+n$.

1. Montrer que f est bijective et calculer sa réciproque.
2. Calculer $g_n \circ g_m$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que g_n est bijective, et calculer sa réciproque.
3. Calculer $g_n \circ f$ et $f \circ g_m$. Quand a-t-on $g_n \circ f = f \circ g_m$? Calculer aussi $f \circ g_n \circ f$ et $f \circ g_n \circ f \circ g_m$.
4. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $h_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h_n(x) = nx$. Calculer $h_n \circ h_m$.
5. (a) Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ telles que l'application h_n est injective.
   (b) Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ telles que l'application h_n est surjective.
   (c) Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ telles que l'application h_n est bijective.

Exercice 2.

1. Rappeler la définition d'une relation d'équivalence.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2$$

   Pour deux réels x et y, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$.

(a) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2, 2]$.
(b) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence.
(c) Combien y a-t-il d'éléments dans chaque classe d'équivalence ?

Exercice 3. On considère l'ensemble $A \subset \mathbb{N}$ des nombres entiers naturels qui sont de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$A = \{4k+1, k \in \mathbb{N}\}$$

et l'ensemble B des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Donner un exemple d'entier premier dans A, et un exemple d'entier non premier dans A.
2. Montrer que si $x, y \in A$ alors le produit xy est dans A.
3. Montrer par récurrence sur le nombre n de facteurs que si $x_1, \ldots, x_n \in A$ alors le produit $\prod_{k=1}^{n} x_k$ est aussi dans A.
4. Montrer que si $p \geq 3$ est un nombre premier alors p est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
5. On veut montrer par l'absurde que B est un ensemble infini. Supposons qu'il soit fini et notons
$$B = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$
Considérons alors $a = 4\prod_{k=1}^{n} p_k - 1$.
   (a) Montrer que a n'est pas divisible par 2.
   (b) Montrer que l'hypothèse que tous les facteurs premiers de a appartiennent à A conduit à une absurdité (utiliser la question 3). En déduire qu'il existe un facteur premier de a de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$ (utiliser la question 4).
   (c) Soit p un facteur premier de a de la forme $4k+3$, montrer que p n'est égal à aucun des p_i. Conclure.

Tourner, svp.

Partie II.

Dans cette partie, **seul un exercice** *est à traiter. Vous pouvez donc traiter* **au choix** *l'exercice A ou l'exercice B. Il est fortement conseillé de ne pas "picorer" dans les deux exercices. La notation récompensera les étudiants qui auront traité sérieusement l'un des exercices.*

Exercice A. Supposons donné, pour tout $i \in \mathbb{N}$, un nombre $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, et posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := \sum_{i=0}^{n} b_i 10^{-i}. \tag{1}$$

1. Supposons que $b_i = 9$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Calculer alors a_n défini par (1), et montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge. Calculer sa limite.
2. Montrer que (dans le cas général) la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée. Conclure qu'elle converge dans $\mathbb{R}$.
3. Supposons que $b_i = 0$ si i est paire et $b_i = 1$ si i est impaire.
   (a) Calculer les termes $a_0, a_1, \ldots, a_8$ (donner le résultat sous forme décimale).
   (b) Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.
   (**Indication :** faire apparaitre une somme géométrique de raison $1/100$.)
   (c) Montrer que cette limite est rationnelle.

Exercice B. Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\preceq$ par

$$x \preceq y \;\Leftrightarrow\; \{\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n\}$$

1. Montrez que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Montrez que $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ n'est pas totalement ordonné.
3. On considère l'ensemble $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminez, s'ils existent, le plus grand et le plus petit élément de A pour $\preceq$.
4. On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 \preceq z$ et $3 \preceq z$. En utilisant la définition de $\preceq$, montrez que ceci est absurde.