Université de Lorraine - Nancy **L1 - algèbre linéaire**

Partiel du 25 mars 2016

Documents et calculatrices interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Le barème est marqué à titre indicatif.

Questions de cours. [4 points]
Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, i.e., $E = F \oplus G$. Rappeler la définition du projecteur p sur F parallèlement à G, et montrer que $p \circ p = p$.

c) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que pour tout vecteur $u \in E$ il existe des scalaires $x_1, ..., x_n$ tels que $u = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Montrer de plus que les scalaires $x_1, ..., x_n$ sont uniques.

Exercice 1. [4 points] Soit

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}.$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $a = (1, 1, 1)$. Montrer que la droite vectorielle $\mathbb{R}a$ et le sous-espace vectoriel E sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) À tout vecteur $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on fait correspondre son projeté $p(w)$ sur E parallèlement à $\mathbb{R}a$. Déterminer le vecteur $p(w)$ en fonction de x, y, z.

Exercice 2. [5 points] Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f\big((x, y, z, t)\big) = (2x - 4y, x - 2y, 0, x - y - z - t).$$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer le noyau et l'image de f. Pour chacun on donnera à la fois un système d'équations réduit et une base.

3) A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$?

Tourner la page s'il vous plaît

Exercice 3. [3 points] Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on se donne une application linéaire $\varphi_a : E \to E$ vérifiant

$$\varphi_a(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi_a(e_2) = e_1 - e_2, \quad \varphi_a(e_3) = e_1 + ae_3.$$

1) Calculera $\varphi_a(u)$ pour tout vecteur $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ avec $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

2) Comment choisir a dans $\mathbb{R}$ pour que l'application φ_a soit injective? surjective?

Exercice 4. [4 points] Soit $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$F = \{f \in E : f(0) = 0 \;\text{ et }\; f'(0) = 0\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit G l'ensemble des fonctions affines de la forme $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

3) Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E.
   Indication: pour tout $h \in E$, on cherchera à écrire $h(x) = f(x) + ax + b$ avec $f \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On utilisera le fait que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ pour déduire les valeurs de a et b.

4) Soit $H = \langle \cos, \sin \rangle$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions cosinus et sinus. Montrer que les sous-espaces F et H sont supplémentaires dans E.

5) A-t-on $G = H$?