Université de Lorraine - Nancy **L1 - algèbre linéaire**

Examen du 2 juin 2016

Documents et calculatrices interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Le barème est marqué à titre indicatif.

Questions de cours. [2 points]

a) Définir les notions de noyau et image d'une application linéaire.

b) Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 1. [2 points]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.

Exercice 2. [4 points]

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

2) Montrer que PAP est une matrice diagonale, que l'on notera D.

3) Comparer PDP^{-1} avec la matrice A.

4) Calculer D^n pour tout entier $n \geq 1$.

5) En déduire A^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3. [6 points]

Soient les applications linéaires

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, x+y+z) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-y, -x+2y, x). \end{array}$$

1) a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
   b) Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim \operatorname{Im} f$. En déduire que f est surjective.

2) a) Montrer que g est injective.
   b) Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim \operatorname{Im} g$.
   c) Montrer que $\big((-1,2,0),(0,-1,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} g$.

Tourner la page s'il vous plaît

3) a) Montrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

   b) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 4. [6 points]

Dans cet exercice on note par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on note par $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$f\big((x, y, z)\big) = (2y + z, 3x + 5y + 4z, 4y + 2z, 3x + 5y + 4z).$$

Montrer que l'application f est linéaire et déterminer sa matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

2) Soit $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille formée par les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1), \quad u_2 = (2, 1, -2), \quad u_3 = (1, 1, -2).$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est une famille libre, et déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Écrire la matrice P.

4) Soit $\mathcal{C}' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$ la famille formée par les vecteurs

$$u'_1 = (1, 2, 2, 2), \quad u'_2 = (0, 1, 0, 1), \quad u'_3 = (1, 1, -1, 0), \quad u'_4 = (0, 1, 1, 1).$$

Montrer que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{C}'$. En déduire que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

5) Soit Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$. Écrire la matrice Q, et déterminer Q^{-1}.

6) Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ de l'application linéaire f entre les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

7) Déterminer le rang de f.