Université de Lorraine **Licence de mathématiques, 2015-2016**

Analyse 1
Examen du 18 mars 2016, durée : 2h

Documents et calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Exercice 1. Questions de cours. ***(X points)***

1. Écrire la définition de “la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet $-\infty$ pour limite”.
2. Écrire la définition de “la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas $-\infty$ pour limite”.

Exercice 2. ***(X points)***

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$u_n = \frac{\sqrt{n^4 + n^\alpha} - n^2}{n^2 + \sin n}.$$

1. Déterminer la limite de $\sin n/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans les cas particulier $\alpha = 2$ et $\alpha = 5$.
3. Traiter le cas général en déterminant la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ suivant les valeurs de α.
4. Dans le cas $\alpha = 3$, déterminer un rang à partir duquel $|u_n| \leq 1/100$.

Exercice 3. ***(X points)***

1. Rappeler les résultats du cours concernant le comportement asymptotique des suites croissantes.
2. Que peut-on dire des suites extraites d'une suite qui admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$?
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante admettant une suite extraite convergente. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Exercice 4. ***(X points)***

Déterminer si les limites suivantes existent en justifiant votre réponse. Si c'est le cas, donner leur valeur :

$$\lim_{x\to 0} x\cos(1/x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}.$$

Tournez la page svp.

Exercice 5. ***(X points)***

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 et telle que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \ell > 1.$$

Montrer qu'il existe un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ sur lequel $f > 1/2$ (on pourra faire un dessin).

Exercice 6. ***(X points)*** Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x = 1 \\ (x+b)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.