Analyse 1
Examen du 28 mai 2015, durée : 3h

Documents et calculatrices et toute machine électronique interdits.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Une présentation générale soignée sera appréciée.

Exercice 1. ***(2 points)***

1. Montrer que la fonction cosinus est concave sur $[0, \pi/2]$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a l'inégalité

$$1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

Exercice 2. ***(4 points)***

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}; \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{4+x}{4-x}\right)^{1/x} ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}.$$

Exercice 3. ***(3 points)***

Exercice 4. ***(3 points)***

1. Écrire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. Soit $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$ sa courbe représentative admet une asymptote dont on donnera l'équation et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Tournez la page svp.

Exercice 5. ***(4 points)***

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que la fonction f definie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ est monotone.
3. Déterminer la limite en l'infini de $\ln f$ puis de f.

Exercice 6. ***(10 points)***