UNIVERSITÉ DE LORRAINE
FACULTÉ DES SCIENCES

SUJET DE PARTIEL

DIPLÔME : LICENCE Semestre 3 — Durée du sujet : 2 heures

Algèbre linéaire 2 — Responsables : J.-F. Grosjean, A. Perego

Date et horaire: 6 novembre 2015 de 10h00 à 12h00 — Documents et calculatrices non autorisés

---

Exercice I

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A(a)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a & -1 \\ -a & 0 & 1-a \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_{A(a)}$ de $A(a)$ vaut :

$$\chi_{A(a)}(\lambda) = (1-\lambda)^2(a-\lambda)$$

2. Préciser suivant les valeurs de a le spectre de $A(a)$ ainsi que la multiplicité de chacune des valeurs propres.
3. Sans faire de calculs expliquer pourquoi $A(1)$ n'est pas diagonalisable.
4. Montrer que rg $(A(a) - I_3) = 2$ si et seulement si $a \neq 0$.
5. En déduire que $A(a)$ est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.
6. Pour $a = 0$, déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}A(a)P$ est une matrice diagonale que l'on précisera.

Exercice II

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Pour tout entier $n \geqslant 1$ considérons :

$$A_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \\ a_1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Posons $\Delta_n(\lambda) = \det(A_n(\lambda))$.

1. Calculer $\Delta_1(\lambda)$, $\Delta_2(\lambda)$ et $\Delta_3(\lambda)$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que $\Delta_n(\lambda) = \lambda^{n-1}a_n^2 + \lambda\Delta_{n-1}(\lambda)$ (on commencera par développer $\Delta_n(\lambda)$ par rapport à la dernière ligne).
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\Delta_n(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs λ pour lesquels $A_n(\lambda)$ est inversible.

5. Calculer le rang de $A_n(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice III

A) Soient $n \geqslant 2$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta_n = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$.

B) Soient $n \geqslant 2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ par :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \left(x_1 + \sum_{j=1}^{n} x_j, \cdots, x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j, \cdots, x_n + \sum_{j=1}^{n} x_j \right)$$
$$= (2x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \ , \ x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n \ , \cdots , \ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 2x_n)$$

1. Déterminer la matrice A de f dans le base canonique.
2. À l'aide de la question A), déterminer le polynôme caractéristique de f.
3. En déduire le spectre de f. Préciser pour chaque valeur propre sa multiplicité.

   On considère le vecteur $v = (1, \cdots, 1)$ et pour tout entier $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, les vecteurs $u_i = e_i - e_{i+1}$, où $(e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que v est un vecteur propre pour une certaine valeur propre α que l'on précisera. Que peut-on dire de la dimension du sous-espace propre associé à α?
5. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, les vecteurs $u_i = e_i - e_{i+1}$ sont des vecteurs propres pour une certaine valeur propre β que l'on précisera.
6. Écrire la matrice Q_n de la famille $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ dans la base canonique puis calculer le rang de Q_n en calculant le déterminant d'une matrice extraite bien choisie.
7. En déduire la dimension du sous-espace propre $E_\beta(f)$.
8. f est-il un endomorphisme diagonalisable ? Si oui, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et écrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice IV

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que pour toute valeur propre λ de f, $g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$ (où $E_\lambda(f)$ désigne le sous-espace propre associé à λ).
2. En déduire que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
3. En déduire que g est diagonalisable.