UNIVERSITÉ DE LORRAINE
FACULTÉ DES SCIENCES

SUJET D'EXAMEN

DIPLÔME : LICENCE Semestre 3 — Durée du sujet : 3 heures
Algèbre linéaire 2 — Responsables : J.-F. Grosjean, A. Perego
Date et horaire: 15 janvier 2016 de 9h00 à 12h00 — Documents et calculatrices non autorisés

---

Exercice I

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$. (Pour le calcul de $\chi_A(\lambda)$ on commencera par ajouter les colonnes 2 et 3 à la colonne 1).
2. Préciser le spectre de A ainsi que la multiplicité de chacune des valeurs propres.
3. Sans faire de calculs mais en justifiant votre réponse montrer que A n'est pas diagonalisable.
4. Après avoir expliquer pourquoi A est trigonalisable, trigonaliser A.
5. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, déterminer le couple (D, N) de la décomposition de Dunford-Jordan.
6. Préciser l'indice de N et le polynôme minimal de A.
7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} et en déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de $X'(t) = AX(t)$.

Exercice II

A) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = (2-\lambda)^3(1-\lambda)$.
2. Montrer que rg $(f - 2\mathrm{Id}_E) = 3$.
3. En déduire que f n'est pas diagonalisable.
4. En justifiant votre réponse dire quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\mathrm{Ker}\ (f-2\mathrm{Id}_E)^2)$.
5. Calculer le rang de $(f - 2\mathrm{Id}_E)^2$ et en déduire $\dim(\mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id}_E)^2)$.
6. En déduire le polynôme minimal de f.
7. Soit (d, ν) le couple de la décomposition de Dunford-Jordan de f. Quelle est l'indice de nilpotence de ν ?

B) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de u. On suppose que le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé et que:

$$\chi_u(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_r)^{\alpha_r}$$

Le polynôme minimal μ_u de u s'écrit alors :

$$\mu_u(X) = (X-\lambda_1)^{\beta_1} \cdots (X-\lambda_r)^{\beta_r}$$

où $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$. Notons $C_{\lambda_1}(u), \cdots, C_{\lambda_r}(u)$ les sous-espaces caractéristiques de u. On rappelle que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(u)$. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ la famille de projecteurs associée à la famille $(C_{\lambda_i}(u))_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

1. Que peut-on dire de $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i$? De même pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, r\}^2$ tel que $i \neq j$, que peut-on dire de $p_i \circ p_i$, $p_i \circ p_j$, $p_{i|_{C_{\lambda_i}(u)}}$ (i.e. la restriction de p_i à $C_{\lambda_i}(u)$) et $p_i(C_{\lambda_j}(u))$?
   Soit (d, ν) le couple de la décomposition de Dunford-Jordan de u. On rappelle que $d = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. D'autre part on note pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\nu_i = \nu \circ p_i$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\nu_i = (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_i$.
3. En déduire que si pour un entier $i \in \{1, \cdots, r\}$ on a $\beta_i = 1$ alors $\nu_i = 0$.
4. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\mathrm{Im}\ (\nu_i) \subset C_{\lambda_i}(u)$.
5. En déduire que pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, r\}^2$ tel que $i \neq j$, $p_i \circ \nu_j = 0$ puis que $\nu_i \circ \nu_j = 0$.
6. En déduire par une démonstration par récurrence, que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a : $u^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i p_i + \nu_i)^k$.
7. Montrer que $p_i \circ \nu_i = \nu_i \circ p_i = \nu_i$.
8. En déduire que pour tout entier $k \geqslant 1$: $u^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \lambda_i^j \nu_i^{k-j}$.

C) Considérons à nouveau l'endomorphisme f de la partie A). Notons p_1 et p_2 les projecteurs associés à la décomposition $E = C_{\lambda_1}(f) \oplus C_{\lambda_2}(f)$ où $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2)$. (d, ν) étant le couple de la décomposition de Dunford-Jordan de f, on définit ν_1 et ν_2 comme dans la partie B). On note d'autre part $P_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_1)$, $P_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_2)$, $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\nu)$, $N_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\nu_1)$ et $N_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\nu_2)$.

1. Montrer que $N_1 = 0$.
2. À l'aide de la partie B), exprimer I_4, A, A^2 et A^3 comme combinaison linéaire de P_1, P_2, N_2 et N_2^2.
3. En déduire P_1, P_2, N_2 et N_2^2 comme combinaison linéaire de I_4, A, A^2 et A^3.
4. En déduire pour tout $n \geqslant 4$, f^n comme combinaison linéaire de Id_E, f, f^2 et f^3.