Partiel Analyse 2 - 2 novembre 2015
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

(1) Dire (avec justification) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable et $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 0$.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum(u_n + u_{n+1})$ converge.

(c) Si $u_n = o(\frac{1}{n})$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose $g : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} f(t)dt$. Laquelle des formules suivantes donne la dérivée de la fonction g ? (Justifier votre réponse.)

(a) $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f'(t)dt$ (b) $f'(x^3) - f'(x^2)$ (c) $3x^2 f(x^3) - 2xf(x^2)$

Exercice 2.

(1) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{(x+1)(x^2+2x+3)}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x}}\,dx.$

(2) Soit pour $n \geq 2$,

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n t}\,dt.$$

Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n. [On pourra faire une intégration par parties (en utilisant la dérivée de la fonction tan).]

Exercice 3.

(1) Dire si la série $\sum u_n$ est convergente ou divergente dans les cas suivants :

(a) $u_n = \dfrac{(n+1)^4}{n! + 1}$ (pour $n \geq 0$)

(b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (pour $n \geq 1$)

(c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (pour $n \geq 2$).

T.S.V.P.

(2) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

   (a) Calculer la somme partielle $\sum_{n=2}^{N} u_n$.

   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4.

(1) Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

   (a) $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+e^{nt}}\,dt$

   (b) $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$ [On pourra poser $p = n + k$.]

   (c) $u_n = n^2 \displaystyle\int_0^{1/n} tf(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $[0,1]$.

(2) Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ qui admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,dt = \ell.$$

[On pourra écrire l'intégrale comme la somme de deux intégrales, l'une de 0 à $\sqrt{n}$ et l'autre de $\sqrt{n}$ à n, et calculer la limite de chacun des deux termes obtenus.]

Exercice 5.

Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$2y\,f(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. [On pourra dériver cette relation par rapport à l'une des deux variables x ou y bien choisie.]