Analyse 2

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses en démontrant les assertions vraies et en donnant un contre-exemple pour les assertions fausses.

(1) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

(2) Si deux normes sur un espace vectoriel V sont équivalentes, elles ont les mêmes ouverts.

(3) Soit $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ une application continue entre deux espaces vectoriels normés. Si K est un compact de W, alors $f^{-1}(K)$ est un compact de V.

(4) Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$. On a $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

Exercice 2.

Déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

(1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$ (pour $n \geq 2$) ;

(2) $u_n = \sin n \log\left(1 + \dfrac{\cos n}{n}\right)$ (pour $n \geq 1$).

Exercice 3.

(1) Discuter la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t^b)}$ en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(2) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$ [On pourra poser $u = t^2$].

(3) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}\, dx$?

(4) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement Riemann-intégrable dont l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

  (a) Quelle est la limite de $\displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\, dt$ quand x tend vers $+\infty$?

  (b) En déduire que si f est de plus positive et décroissante alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$.

Exercice 4.

(1) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x) = \max\{|x_1 - x_2|, |x_1|\}$.

  (a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

  (b) Représenter la boule unité $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid N(x) \leq 1\}$.

T.S.V.P.

(2) Soit E l'ensemble formé par les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que la série $\sum f(k)$ converge absolument. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f(k)|}{2^k} \quad \text{et} \quad M(f) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(k)|.$$

(a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que N et M définissent des normes sur E (On justifiera en particulier que les applications N et M sont bien définies.)

(c) Établir la relation $N(f) \leq \alpha\, M(f)$ pour tout $f \in E$, où $\alpha > 0$ est une constante que l'on déterminera.

(d) Les normes N et M sont-elles équivalentes ?

Exercice 5.

Dire si les limites suivantes existent et les calculer si c'est le cas :

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^5)}{(x^2+y^2)^2}$;

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \exp(-\frac{y}{x})$;

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \sin y}{x^6+\sin^2 y}$.

Exercice 6.

Soit $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit V de la norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \forall f \in V.$$

On définit les applications

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_0^1 |f(t)|\, dt \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & V & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

(1) Montrer que les applications φ et ψ sont lipschitziennes et continues.

(2) Soit $D = \{f \in V \mid \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } f(1) = 1\}$. Montrer que l'ensemble D est fermé dans V.

(3) Montrer qu'on a $\varphi(f) > 0$ pour tout $f \in D$, et construire une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de D telle que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(f_n) = 0$.

(4) L'ensemble D est-il compact? La boule fermée $B = \{f \in V \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ est-elle compacte?