Contrôle du 30 Mai, 2016

Sans documents. Durée : 3 heures

1. Soit H la fonction définie par
$$\begin{array}{rcl} H: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y(x^2-y^4)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$
Calculer $\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0,0)$ si elles existent.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
   (b) Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

3. Calculer
$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$
où D est le quart du disque unité de centre zéro inclus dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

4. On considère l'équation différentielle
$$y'' + xy' + y = 1.$$
On cherche l'unique solution $y = f(x)$ de cette équation vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$.
   (a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
   (b) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
   (c) Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

5. En utilisant le changement de variable $u = x + y$ et $v = 3x + y$, trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

6. On note ∂T le contour du triangle ABC dans le plan $\mathbb{R}^2$, avec $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, et $C = (1,3)$, parcouru dans le sens trigonométrique. Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'intégrale curviligne
$$\int_{\partial T} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy.$$