Contrôle du 21 Mars, 2016

Sans documents. Durée : 2 heures

1. On considère la fonction H définie par

$$H : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto H(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{2x^2-2xy+5y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vérifier que H est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et étudier sa continuité et sa différentiabilité.

2. Soit $\mathbb{R}(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On définie l'application H par

$$H: \quad \mathbb{R}(n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(M,X) \longmapsto {}^tXMX$$

où ${}^tA$ désigne la transposé d'une matrice A. Justifier que H est différentiable et calculer sa différentielle.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la suite a_n par

$$a_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt.$$

Calculer $\lim_{n \mapsto +\infty} a_n$.

4. Pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,1]$, soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$. On note S sa somme.
   (b) La série est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$.
   (c) La série est-elle normalement convergente sur $[0,1]$.

5. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées avec (b_n) convergente. Montrer que

$$\limsup_{n\mapsto+\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n\mapsto+\infty} (a_n) + \limsup_{n\mapsto+\infty} (b_n).$$