Examen - Durée 3h

Les documents ainsi que le matériel électronique (calculatrice, téléphone...) ne sont pas autorisés. La précision des justifications et le soin apporté à la rédaction seront des critères importants d'évaluation.

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
2. (a) Rappeler la définition de la covariance de deux variables aléatoires.
   (b) Soit X une variable aléatoire qui possède un moment d'ordre 2.
   Calculer $\mathrm{Cov}(3X+2, -X+1)$ en fonction de la variance de X.

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
   Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :
   $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\,,\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$
   (b) Soient i et j deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$. En s'inspirant de la question précédente, calculer : $P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
2. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?
   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

I. Loi exponentielle

Dans cette partie **I.**, λ désigne un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathrm{P}(X > x)$ (appelée *fonction de survie de* X).
2. Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X>x)}(X > x + y)$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
4. Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
Déterminer la fonction de survie de Z_n. En déduire sa fonction de répartition, puis reconnaître sa loi.

II. Loi de Pareto

Soient a et b des réels strictement positifs. Par définition, on dit d'une variable aléatoire qu'elle suit la loi de Pareto de paramètres a et b si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b\,; \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq b. \end{cases}$$

Soit alors X une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres a et b.

1. Démontrer que la fonction f définit bien une fonction de densité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X, en précisant à quelles conditions chacune de ces quantités existe.
3. Déterminer la fonction de répartition de X. Préciser la fonction de survie : $x \mapsto \mathrm{P}(X > x)$.
4. Démontrer que, pour tout réel y positif ou nul, la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X>x)}(X > x + y)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. De façon analogue à la question **I.2.**, que peut-on dire d'un phénomène dont la durée de vie est modélisée par X ?
5. On pose dans cette question : $Y = \ln \dfrac{X}{b}$.
Calculer la fonction de répartition de Y, et en déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de survie de Z_n. En déduire sa fonction de répartition, puis reconnaître sa loi.
   (b) Montrer que pour n suffisamment grand, Z_n est intégrable, et préciser son espérance. Quelle est la limite de cette dernière quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3

Une tortue pond des œufs sur une plage. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'œufs pondus. Chaque œuf survit avec probabilité p (où $0 < p < 1$), indépendamment des autres. Soit Y le nombre d'oeufs qui survivent.

1. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres n et q (où $0 < q < 1$) .
   (a) Pour deux entiers k et ℓ tels que $0 \leq k \leq \ell \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = k|X = \ell)$.
   (b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
   (c) Donner la loi marginale de Y. On montrera que Y suit une loi binomiale, dont on déterminera les paramètres.
   On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la formule : $\binom{\ell}{k}\binom{n}{\ell} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$.
2. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$.
   (a) Pour deux entiers k et ℓ tels que $0 \leq k \leq \ell$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = k|X = \ell)$.
   (b) Déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
   (c) Donner la loi marginale de Y. On montrera que Y suit une loi de Poisson, dont on déterminera les paramètres.
   (d) Montrer que les variables aléatoires Y et $X - Y$ sont indépendantes.