Partiel - Durée 2h

Les documents ainsi que le matériel électronique (calculatrice, téléphone...) ne sont pas autorisés. La précision des justifications et le soin apporté à la rédaction seront des critères importants d'évaluation.

Exercice 1 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,, \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\int_0^x f(t)dt$.
   (b) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ converge et préciser sa valeur.
   (c) Justifier très soigneusement le fait que la fonction f est une densité de probabilité.
2. (a) Rappeler la définition de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X.
   (b) Soit T une variable aléatoire de densité f. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F_T de T.
   (c) Déterminer la valeur médiane de T, c'est-à-dire le réel x tel que $F_T(x) = \frac{1}{2}$.
   (d) Esquisser la courbe représentative de la fonction F_T.

Exercice 2 Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

1. On tire des boules **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à tirer la boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X (*une réponse argumentée est attendue*).

On choisit maintenant une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note : • C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
• C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

2. À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout entier $j \in \{1, \ldots, N\}$:

$$P(Y = j \,|\, C_1) = \frac{1}{N}.$$

3. Calculer $P(Y = j \,|\, C_2)$ pour tout entier $j \in \{1, \ldots, N\}$.

4. Montrer que :

$$P(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in \{1, \ldots, N-1\} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

5. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 3
On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.
On suppose donné un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer.
On note :

— pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'événement “on obtient FACE au n-ième lancer” ;

— pour tout entier $n \geq 2$, D_n l'événement “on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois**”

— pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = P(D_n)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

“PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE”

alors l'événement D_8 est réalisé.

1. (a) On lance n fois de suite la pièce de monnaie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces n lancers.
Déterminer la loi de X (*une réponse argumentée est attendue*).
Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.

   (b) On lance indéfiniment la pièce. On note Y le rang d'apparition du premier PILE, s'il apparaît.
Déterminer la loi de Y (*une réponse argumentée est attendue*).
Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y ainsi que la valeur de $P(Y = k)$ lorsque $k \in Y(\Omega)$.

2. (a) Calculer v_2 et v_3.

   (b) Soit $n \geq 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2}.
Quel est alors le résultat du second lancer ? À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ?
En déduire que :
$$P(D_{n+2} \,|\, \overline{F_1}) = \frac{1}{3} v_n.$$

   (c) Pour $n \geq 2$, justifier que :
$$P(D_{n+2} \,|\, F_1) = v_{n+1}.$$

   (d) Montrer que :
$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3} v_{n+1} + \frac{2}{9} v_n.$$

3. (a) Pour tout entier $n \geq 2$, on note E_n l'événement “on obtient un double PILE au rang n”.
Les événements $(E_n)_{n \geq 2}$ forment-ils une famille d'événements indépendants ?
Et les événements $(E_{2k})_{k \geq 1}$?

   (b) Soit E l'événement : “il y a une infinité d'entiers $n \geq 2$ tels que E_n est réalisé”.
En justifiant très soigneusement votre réponse, montrer que $P(E) = 1$.