

Intégration et Probabilités

Devoir surveillé du 11 janvier 2016

durée 3h

*Les calculatrices et les documents sont interdits.**ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.*

Exercice 1. On note Γ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t t^{x-1} dt.$$

Indication : commencer par prendre $x \in]a, b[$, avec $0 < a < b < +\infty$.

II

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite.

Indication : on pourra étudier la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} dv$. À cet effet, on pourra calculer la somme

$$1 + (1-v) + \dots + (1-v)^{n-1}.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = - \int_0^1 \log v (1-v)^n dv.$$

4. Établir que pour tout $t \geq 0$, $1-t \leq e^{-t}$.
5. On pose $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t dt$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t dt.$$

Indication : écrire I_n sous la forme $I_n = \int_{]0, +\infty[} f_n(t) d\lambda(t)$, avec f_n bien choisie.

6. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Indication : on pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1} (\log n - H_{n+1})$

Exercice 2. Nombres de Bell et loi de Poisson

On rappelle que pour $\lambda > 0$, la loi de Poisson de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, est la mesure de probabilité sur \mathbb{N} vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(\lambda)(k) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel vit une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Soit f une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} telle qu'il existe $A > 0$ et n entier naturel avec

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |f(k)| \leq A(1 + |k|^n).$$

- (a) Montrer que la variable aléatoire $Xf(X)$ est intégrable et montrer que

$$\mathbb{E}(Xf(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} kf(k)\mathcal{P}(\lambda)(k).$$

(b) On pose $Y = X + 1$. Montrer que pour tout entier naturel k , on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{k}{\lambda} \mathbb{P}(X = k).$$

(c) On note μ_λ la mesure image de $\mathcal{P}(\lambda)$ par l'application $x \mapsto x + 1$. μ_λ admet-elle une densité par rapport à $\mathcal{P}(\lambda)$, si oui, laquelle?

Note : il n'est pas nécessaire d'avoir résolu cette question pour traiter la suite

(d) Montrer que $\mathbb{E}(Xf(X)) = \lambda \mathbb{E}(f(X + 1))$.

2. À partir de maintenant, on suppose que $\lambda = 1$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X^n)$. En utilisant ce qui précède, démontrer la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k.$$

3. Si A est un ensemble fini non vide, on note $\overline{B}(A)$ l'ensemble des partitions de A en une famille d'ensembles non-vides. Par exemple, les partitions de $\{1, 2, 3\}$ sous forme d'ensembles non-vides sont

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{1, 2, 3\}\}, \\ P_2 &= \{\{1\}; \{2, 3\}\}, \quad P_3 = \{\{2\}; \{1, 3\}\}, \quad P_4 = \{\{3\}; \{1, 2\}\} \\ P_5 &= \{\{1\}; \{2\}; \{3\}\} \end{aligned}$$

On pose également par convention $\overline{B}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. On admettra que le cardinal de $\overline{B}(A)$ ne dépend que de celui de A , et on pose alors $B_n = |\overline{B}(\{1, \dots, n\})|$. B_n est le n -ième nombre de Bell.

Soit ϕ l'application de $\overline{B}(\{1, \dots, n + 1\})$ dans $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ qui à $P \in \overline{B}(\{1, \dots, n + 1\})$ associe $\tilde{P} \setminus \{n + 1\}$, où \tilde{P} est l'élément de la partition P contenant $n + 1$. Ainsi, lorsque $n = 2$, on a $\phi(P_2) = \{2\}$.

(a) Que valent B_0, B_3 ? Si vous ne réussissez pas à répondre à cette question, je vous suggère d'admettre la formule de récurrence d'Aitken démontrée infra et de passer à la suite.

(b) Lorsque $n = 2$, calculer $\phi(P_1), \phi(P_2), \phi(P_3), \phi(P_4), \phi(P_5)$.

(c) Dans le cas général, montrer que pour tout $A \subset \{1, \dots, n\}$, $\phi^{-1}(A)$ est en bijection avec $\overline{B}(\{1, \dots, n\} \setminus A)$.

(d) Établir la formule de récurrence d'Aitken :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

-
4. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $B_n = \mathbb{E}(X^n)$.
5. Montrer enfin la formule de Dobiński :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

6. Pour les cœurs vaillants : on pose, pour $x > 0$ $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.
Montrer que

$$\forall x > 0 \quad E(x) = \exp(\exp(x) - 1).$$

FIN