Algèbre 2

Examen du 12/01/2016

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 3h

Exercice 1. (a) Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 2015. Donner la liste ainsi que les invariants.

(b) Même question pour les groupes abéliens d'ordre 2016.

Exercice 2. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$:

(a) $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$,

(b) $2X^{15} - 7X^{12} + 35X^{10} - 84X^6 + 14X^4 + 7X^3 - 49X^2 + 210X - 21$,

(c) $X^{32} - 210$.

Exercice 3. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + ib\sqrt{7};\ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(b) On pose pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, $\theta(z) = z\bar{z} = |z|^2$. On note $(\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])_*$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])_* = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}];\ \theta(z) = 1\}$, déterminer alors $(\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])_*$.

(c) Montrer que 2, $1 + i\sqrt{7}$ et $1 - i\sqrt{7}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(d) Montrer que 2 n'est associé ni à $1 + i\sqrt{7}$ ni à $1 - i\sqrt{7}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(e) Montrer que 8 admet dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ deux décompositions en facteurs irréductibles. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier qui n'est pas un carré d'un entier et soit l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, où on convient de noter $\sqrt{n} = i\sqrt{-n}$ si $n < 0$.
Soit θ la fonction définie sur $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ par $\theta(a + b\sqrt{n}) = |a^2 - b^2 n|$.

L'objet de cet exercice est de mettre en évidence quelques anneaux non principaux de la forme $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(b) Vérifier que θ est une application multiplicative, $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$.

(c) Montrer que dans un anneau principal A, si un élément x est irréductible, et divise un produit ab, alors il divise l'un au moins des éléments a ou b.

(d) Montrer que dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, 2 ne divise ni $n + \sqrt{n}$ ni $n - \sqrt{n}$.
En déduire que si 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ n'est pas principal.

(e) Montrer que s'il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ vérifiant $\theta(\alpha) = 2$, alors 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

(f) Montrer que si $n \leq -3$, il n'existe pas d'élément $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tel que $\theta(\alpha) = 2$.
En déduire que si $n \leq -3$, alors 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

(g) Supposons maintenant que n est de la forme $4k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Soit $\alpha = x + y\sqrt{n}$ un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
En introduisant les restes r_1 et r_2 de la division euclidienne (dans $\mathbb{Z}$) de x et y par 4, établir que si $\theta(\alpha) = 2$, alors $r_1^2 - r_2^2 + 2$ est multiple de 4.
En déduire que l'équation $\theta(\alpha) = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

(h) Conclure.