

Université de Lorraine
Probabilités L3 Maths – Partiel mars 2016

Exercice 1

1. Soit $f : (x, y) \mapsto (xy, x/y)$. Montrer que f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans un ouvert de \mathbb{R}^2 qu'on déterminera.
2. Soient X, Y deux v.a. i.i.d. de loi $\text{Exp}(\mu)$, $\mu > 0$. Déterminer la loi du couple $(XY, X/Y)$.

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. de lois respectives $X_n \sim \text{Ber}(1 - 2^{-n})$. Soit $T := \sup\{n \geq 1 \mid X_n = 0\}$ (par convention, $T := 0$ si $X_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, et $T := \infty$ si $\{n \geq 1 \mid X_n = 0\}$ est non borné). En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $T < \infty$ p.s.
2. On suppose de plus que les (X_n) sont indépendantes.
 - (i) Calculer explicitement $\mathbb{P}[T = n]$ ($n \geq 1$), en donner un équivalent simple. Vérifier que $\mathbb{P}[T = 0] > 0$.
 - (ii) Borner $\sum_{m \geq n} \mathbb{P}[X_m = 0]$. En déduire une borne pour $\mathbb{P}[\exists m \geq n, X_m = 0]$.
 - (iii) En déduire à nouveau: $T < \infty$ p.s.