Université de Lorraine
Probabilités L3 Maths – Examen avril 2016
Durée: 2h

Exercice 1.

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X, Y de densités respectives

$$f_X(x) = c_1 x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0}, \qquad f_Y(y) = c_2 y^{\frac{l}{2}-1} e^{-y/2} \mathbf{1}_{y>0}$$

avec $k, l \in \mathbb{N}$ (les constantes de normalisation sont $c_1 = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})}$, $c_2 = \frac{1}{2^{l/2}\Gamma(\frac{l}{2})}$, mais on pourra les laisser simplement en facteur sans utiliser leurs valeurs explicites).

Calculer la loi de $V := X/Y$.

Indication: on pourra calculer d'abord la loi du couple $(U, V) := (X, \frac{X}{Y})$, puis la densité marginale de V. On rappelle:

$$\int_0^{+\infty} du\, u^{\lambda-1} e^{-\gamma u} = \gamma^{-\lambda}\Gamma(\lambda), \qquad \lambda, \gamma > 0.$$

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = X_n + X_{n+1}.$$

1. Montrer que les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont de même loi. Prciser cette loi.

2. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathrm{Var} Y_n$ et $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.

3. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle une suite de variables aléatoires indépendantes ?

4. La suite $(Y_{2n})_{n\geq 1}$ est-elle une suite de variables aléatoires indépendantes ?

5. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_{2k})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0. On précisera et vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé.

6. On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Montrer que $(M_{2n})_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers 0. Indication: grouper astucieusement les termes.

7. On pose $\Psi = \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{Y_n}{n})^2$. Montrer que $\mathbb{E}(\Psi) < +\infty$. En déduire que la suite $(Y_n/n)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers 0.

8. Montrer enfin que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers 0.

Exercice 3.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathrm{Ber}(p)$, $p \in]0,1[$ et $A \in]0,1[$. On note: $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X_n}]$, $n \geq 1$.

2. Soit $\lambda > 0$. Montrer: $\mathbb{P}[M_n > A] \leq F_n(\lambda, A) := e^{-n\lambda A}(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}])^n$.

3. Quel est le maximum de la fonction $\lambda \mapsto \ln F_n(\lambda, A)$ sur $\mathbb{R}_+$? En déduire: $\mathbb{P}[M_n > A] \leq (A/p)^{-n}$.

4. Dans cette question, on suppose $A > p$. Soit $\tilde{M}_n := M_n \mathbf{1}_{M_n > A}$. Montrer: $\tilde{M}_n \to_{n\to\infty} 0$ p.s.