Université de Lorraine, site de Nancy — Licence de Mathématiques
Géométrie 2 — Semestre 6, printemps 2016

Examen
Mercredi 1er juin 2016
Durée : 2 heures — 2 pages
Calculatrices, appareils électroniques et documents interdits

IMPORTANT : il sera tenu compte de la précision de la rédaction et de la qualité de la présentation et de l'orthographe lors de l'évaluation de la copie. Les copies rendues hors délais seront pénalisées.

Exercice 1 — **Question de cours.** On se donne trois points non alignés A, B et C. Construire à la règle et au compas à partir de $\{A, B, C\}$ la parallèle à (AB) passant par C. On détaillera toutes les étapes de la construction.

Exercice 2 — Dans un plan affine euclidien, soit (ABC) un triangle équilatéral et Γ le demi-cercle de diamètre $[BC]$ situé du côté opposé à A par rapport à la droite (BC). Soit O le milieu de $[BC]$. Soit I et J les points de $[BC]$ tels que

$$BI = CJ = \frac{BC}{3}.$$

Soit K le point d'intersection de Γ et (AI), soit L le point d'intersection de Γ et (AJ).

L'objectif de cet exercice est de montrer que $\widehat{BOK} = \widehat{COL} = \frac{\pi}{3}$.

(1) Soit S le symétrique de A par rapport à C et M le milieu de $[BS]$. Montrer que (ABS) est rectangle en B et en déduire que (MC) est perpendiculaire à (BS).
(2) Quel est le centre de gravité du triangle (ABS) ?
(3) En déduire que $M = L$.
(4) Montrer que (COL) est équilatéral.
(5) Conclure.
(6) Construire à la règle et au compas, à partir de $\{A, B\}$, tous les points introduits dans cet exercice.

Exercice 3 — Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Soit un point $O \in \mathcal{P}$ et un réel $k > 0$. Pour tout poit M du plan distinct de O on note M' le point de la droite (OM) tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$$

(ceci ne dépend pas de l'orientation choisie sur (OM)). L'application

$$f : \mathcal{P} \setminus \{O\} \to \mathcal{P} \setminus \{O\}, M \mapsto M'$$

est appelée *inversion* de pôle O et de puissance k.

(1) Montrer que f est une involution, c'est-à-dire que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}\setminus\{O\}}$.
(2) Soit deux points A et B tels que O, A et B ne sont pas alignés. On suppose que $A' \neq A$.
   (a) Justifier brièvement le fait que A, A' et B ne sont pas alignés.

(b) Soit Γ le cercle circonscrit à $(AA'B)$, Ω son centre et r son rayon. Exprimer $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ en fonction de r et $O\Omega$. On pourra considérer le projeté orthogonal de Ω sur (OA) et utiliser le théorème de Pythagore.

(c) Si (OB) est n'est pas tangente à Γ, on note I le point d'intersection de Γ et (OB) distinct de B ; si (OB) est tangente à Γ, on pose $I = B$. Déterminer de même $\overline{OB} \cdot \overline{OI}$ et en déduire que $B' = I$.

(3) Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O. L'objectif de cette question est de montrer que $f(\mathcal{C} \setminus \{O\})$ est une droite parallèle à la tangente à $\mathcal{C}$ en O.

(a) On note A le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à O. On suppose pour l'instant que $A' \neq A$. Soit $M \in \mathcal{C}$. En utilisant la question 2, que peut-on dire des points A, A', M, M' ?

(b) Que peut-on dire des droites (OM) et (AM) ? En déduire que $(A'M')$ est perpendiculaire à (OA).

(c) En déduire que $f(\mathcal{C} \setminus \{O\}) \subset \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ désigne la droite perpendiculaire à (OA) passant par A'.

(d) Soit $N \in \mathcal{D}$. Montrer de la même manière que $N' \in \mathcal{C}$.

(e) Conclure le cas où $A' \neq A$.

(f) Traiter le cas où $A' = A$.